

# Análisis funcional

## Taller 3

Hahn Banach, Espacios duales.

Fecha de entrega: 16 de febrero de 2023

---

1. Demuestre el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos.

Sugerencia: Para un espacio vectorial sobre los complejos  $X$  muestre que:

(a) Sea  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional  $\mathbb{R}$ -lineal, entonces

$$V_\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad V_\varphi(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix),$$

es un funcional  $\mathbb{C}$ -lineal sobre  $X$  con  $\operatorname{Re}V_\varphi = \varphi$ .

(b) Sea  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional  $\mathbb{C}$ -lineal con  $\operatorname{Re}\lambda = \varphi$ , entonces  $V_\varphi = \lambda$ .

(c) Sea  $p$  una seminorma sobre  $X$  y  $\varphi, V_\varphi$  definido como en el punto anterior. Si  $\varphi$  es acotado, entonces

$$|\varphi(x)| \leq p(x) \iff |V_\varphi(x)| \leq p(x), \quad x \in X.$$

(d)  $\|\varphi\| = \|V_\varphi\|$  si  $\varphi$  es acotado.

2. En  $X = \ell_2(\mathbb{N})$  considere el subespacio

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ excepto para un número finito de índices } n\}.$$

Sea  $V$  un complemento algebraico de  $U$  en  $X$ , i. e.,  $U$  es un subespacio tal que  $U + V = X$  y  $U \cap V = \{0\}$ . Muestre que

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{para } x = u + v \text{ con } u \in U, v \in V$$

es un funcional lineal bien definido y no acotado.

3. (a) Sea  $c \subseteq \ell_\infty$  el conjunto de las sucesiones convergentes. Muestre que el funcional

$$\varphi_0 : c \rightarrow \mathbb{K}, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

es continuo y calcule su norma.

(b) Sea  $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  el conjunto de todas las sucesiones acotadas en  $\mathbb{R}$  con la norma del supremo. Muestre que existe  $\varphi \in (\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$  tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

4. Sea  $X$  un espacio normado,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal no nulo y  $K = \ker f$

(a) Muestre que  $\dim(X/K) = 1$ .

(b) Muestre que  $f$  es continuo si y solo si  $\ker f$  es cerrado.