

Análisis funcional

Taller 2

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 9 de febrero de 2023

1. Sea \mathcal{D} un subespacio denso en un espacio normado X , y sea Y un espacio de Banach y $T \in L(\mathcal{D}, Y)$. Defina $\widehat{T} : X \rightarrow Y$ por $\widehat{T}x := \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$ donde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ es una sucesión que converge a x . Ya se mostró que \widehat{T} está bien definido.

Demuestre que $\widehat{T} \in L(X, Y)$, que es la única extensión continua de T a X y que $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

2. Sea X un espacio compacto, $C_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunto de funciones continuas real-evaluadas sobre X y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado.

(a) Considere el mapa $\varrho : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$ definido por $\varrho(f) = f|_Y$. Muestre que $I := \ker(\varrho)$ es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}(X)$.

(b) Sea $\tilde{\varrho} : C_{\mathbb{R}}(X)/I \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$ el mapa inducido en el espacio cociente. Pruebe que $\tilde{\varrho}$ es una isometría.

(c) Demuestre que $\text{rg}(\varrho)$ es completo.

3. (a) Sea $X = C([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Muestre que

$$T : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad Tx = \int_a^b x(t) dt$$

es un operador lineal y acotado. ¿Cuál es su norma?

- (b) Ahora considere X con la norma

$$\|x\|_p := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad x \in X,$$

para $1 \leq p < \infty$. ¿Sigue siendo T acotado? Si es así, calcule su norma.

(Si no han visto teoría de medida, indíquelo claramente y hagan el ejercicio solo para $p = 1$).

4. Sea $1 \leq p < \infty$. Para $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\infty}(\mathbb{N})$ sea $T : \ell_p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_p(\mathbb{N})$ definido por $(Tx)_n = x_n z_n$ para $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Muestre que $T \in L(\ell_p(\mathbb{N}))$ y calcule $\|T\|$.