

Análisis funcional

Taller 1

Espacios métricos y normados.

Fecha de entrega: 02 de febrero de 2023

1. Sea X un espacio normado. Muestre:

- (a) Todo subespacio finito-dimensional de X es cerrado.
- (b) Si V es un subespacio finito-dimensional de X y W es un subespacio cerrado de X , entonces

$$V + W := \{v + w : v \in V, w \in W\}$$

es un subespacio cerrado de X .

2. Sea T un conjunto y $\ell_\infty(T)$ el conjunto de todas las funciones $x : T \rightarrow \mathbb{K}$ con

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in T\} < \infty.$$

Muestre que $(\ell_\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

3. Considere los espacios de sucesiones d , c_0 , c definidos por

$$\begin{aligned} c &:= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es convergente}\}, \\ c_0 &:= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \\ d &:= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_n = 0 \text{ para } n \geq N\}. \end{aligned}$$

- (a) Muestre que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.
- (b) Muestre que $(d, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado, pero que no es completo.

4. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Demuestre que todas las normas en \mathbb{K}^n son equivalentes. Es decir: Si $\|\cdot\|$ y $\|\|\cdot\|\|$ son normas en \mathbb{R}^n , entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$a\|x\| \leq \|\|x\|\| \leq b\|x\|, \quad x \in \mathbb{K}^n.$$