Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 16

Operadores compactos.

Fecha de entrega: 29 de mayo 2020

---

1. Sea H un espacio de Hilbert y sea $T \in L(H)$. Demuestre que A es compacto si y solo si T^*T es compacto.

2. Sea H un espacio de Hilbert. Demuestre:

   (a) Un operador $T \in L(H)$ es compacto si y solo si T es el límite de operadores con rango finito (el límite en la norma de operadores).

   (b) Todo operador $T \in L(H)$ es el límite fuerte de operadores compactos.

   Demuestre que A es compacto si y solo si T^*T es compacto.

3. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $K \in L(H_1, H_2)$ un operador compacto. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de proyecciones con $P_n \xrightarrow{s} \text{id}$. Muestre que $\|K - KP_n\| \to 0$.

4. Defina $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ por

$$Tx = \Big(0, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_3}{2^2}, \dots, \frac{x_1 + x_{n+1}}{2^n}, \dots\Big).$$

   Muestre que T es compacto y determine $\|T\|$, $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$.