

# Análisis Funcional

Taller 15

Operadores compactos.

Fecha de entrega: Mayo 22 de 2020

---

1. Determine todas las funciones continuas  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tales que

$$A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad Af := f \circ \tau$$

es compacto.

2. Sea  $X = C[0, 1]$  y  $k \in C[0, 1]^2$  y defina

$$T : X \rightarrow X, \quad (Tx)(t) = \int_0^t k(s, t)x(s) ds.$$

En clase se mostró que  $T$  es compacto.

- Muestre que  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$ .
- Muestre que para todo  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y para todo  $y \in X$  existe exactamente un  $x \in X$  tal que  $(T - \lambda)x = y$ .

3. Sea  $H$  un espacio de Hilbert, y sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión ortonormal. Sea  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales acotada. Defina:

$$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$

Muestre que  $A$  es un operador acotado autoadjunto y que es compacto si y solo si  $\lambda_k \rightarrow 0$ .

4. Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo. Demuestre que para  $T \in L(X)$  lo siguiente es equivalente:

- $T$  es compacto.
- Para toda sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  débilmente convergente, la sucesión  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.