

Análisis Funcional

Taller 14

Operadores no negativos, operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Mayo 15 de 2020

1. Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Demuestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| < \varepsilon$ para todo $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\| \leq 1$ y todo $n, m \geq N$.
2. Sea X un espacio de Banach y $T(X \rightarrow X)$ un operador lineal densamente definido y cerrado. Muestre:
 - (a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
 - (b) $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ donde $\partial\sigma(T)$ denota la frontera de $\sigma(T)$ en \mathbb{C} .
 - (c) Si X es un espacio de Hilbert y T es autoadjunto, entonces $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.
3. Sea X un espacio de Banach complejo. Para $T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ sea

$$\mathcal{A}_\lambda(T) := \{x \in X : x \in \ker(T - \lambda)^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

el espacio propio generalizado de T en $\lambda \in \sigma_p(T)$.

- (a) Sea $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, $x_0 \in \mathcal{A}_{\lambda_0}(T) \setminus \{0\}$ y $\mathcal{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\}$. Defina

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\rightarrow X, & f(\lambda) &:= (\lambda - T)^{-1}x_0, \\ g : \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\} &\rightarrow X, & g(\lambda) &:= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 - T}{\lambda_0 - \lambda} \right)^n x_0. \end{aligned}$$

Demuestre que g es una extensión holomorfa de f .

- (b) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios de T con $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \neq k$ y sea $\mathcal{A}_{\lambda_j}(T)$ el espacio propio generalizado. Sea $x_j \in \mathcal{A}_{\lambda_j}(T)$, $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Demuestre que los x_1, \dots, x_n son linealmente independientes.
4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $U \in L(H)$ un operador unitario. Demuestre que $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.