Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 13

Espectro de operadores lineales.

Fecha de entrega: 08 de mayo de 2020

---

1. (a) Sea $X = C([0,1])$ y $a \in C([0,1])$. Muestre que

$$A : X \to X, \qquad (Ax)(t) = a(t)x(t)$$

es un operador lineal acotado. Encuentre $\|A\|$, $\sigma(A)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$.

(b) Sea $X = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$ y

$$S : X \to X, \qquad (Sf)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

Encuentre $\sigma(S)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(S)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(S)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(S)$.

2. Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión acotada, y,

$$T : \ell^1 \to \ell^1, \qquad T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Encuentre $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$. Muestre además que, para todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto no vacío, existe un operador $T \in L(\ell^1)$ cuyo espectro es K.

3. Sea X un espacio de Banach $S, T \in L(X)$. Muestre que $\sigma(ST) \setminus \{0\} = \sigma(TS) \setminus \{0\}$.

Hint. Muestre que $\mathrm{id} - ST$ es invertible si y solo si $\mathrm{id} - TS$ es invertible, encontrando una relación entre $(\mathrm{id} - TS)^{-1}$ y $(\mathrm{id} - ST)^{-1}$. Suponga $||T||\,||S|| < 1$ y mire si la relación en este caso es válida en general.

4. Encuentre el espectro puntual, el espectro continuo y el espectro residual de los operadores:

$$\begin{aligned}
&R : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots),\\
&L : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),\\
&T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).
\end{aligned}$$