Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 12

Operadores no negativos, operadores adjuntos. Fecha de entrega: Mayo 01 de 2020

Sea H un espacio de Hilbert. Si S y T son operadores en $L(H)$ autoadjuntos, decimos que T es *no negativo* ($T \geq 0$) si $\langle Tx\,, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$ y $T \leq S$ si $S - T \geq 0$. Una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(H)$ es *creciente* si $T_n \leq T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *decreciente* si $(-T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

1. Sea H un espacio de Hilbert y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y monótonamente creciente de operadores autoadjuntos. Muestre que la sucesión converge en el sentido fuerte a un operador autoadjunto.

2. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert H. Muestre que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido fuerte a una proyección ortogonal P y además

   (a) rg $P = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} rgP_n}$ si P_n es creciente.

   (b) rg $P = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} rgP_n}$ si P_n es decreciente.

3. Sean H_1, H_2 y H_3 espacios de Hilbert y $S(H_1 \to H_2)$ y $T(H_2 \to H_3)$ operadores lineales densamente definidos.

   (a) Si $T \in L(H_2, H_3)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.

   (b) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces TS es densamente definido y $(TS)^* = S^*T^*$.

   (c) Si S es inyectivo y $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$ entonces S^* es inyectivo y $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$

4. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $U : H_1 \times H_2 \to H_2 \times H_1$, $U(x, y) = (-y, x)$. Entonces

   (a) U es unitario.

   (b) Si $T(H_1 \to H_2)$ es densamente definido,
   $$G(T^*) = [U(G(T))]^\perp = U(G(T)^\perp).$$

   (c) T^* es cerrado.

   (d) Si T es clausurable, T^* es densamente definido y $T^{**} = \overline{T}$.