Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 11

Proyecciones, Bases ortonormales y Operadores Normales

Fecha de entrega: 24 de Abril de 2020

---

1. Sea H un espacio de Hilbert, $V, W \subseteq H$ subespacios cerrados y P_V, P_W sus correspondientes proyecciones ortogonales.

   (a) Muestre que
   $$V \subseteq W \quad \iff \quad P_V = P_V P_W = P_W P_V.$$

   (b) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $P_V P_W = 0$.

   (ii) $V \perp W$.

   (iii) $P_V + P_W$ es una proyección ortogonal.

   Muestre que $\mathrm{rg}(P_V + P_W) = V \oplus W$ si alguna de las condiciones anteriores se tiene.

2. Sea H un espacio de Hilbert y P_0, P_1 las proyecciones ortogonales sobre H_0, $H_1 \subseteq H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalenteas:

   (i) $H_0 \subseteq H_1$,

   (ii) $\|P_0 x\| \leq \|P_1 x\|, \quad x \in H$.

   (iii) $\langle P_0 x \,, x\rangle \leq \langle P_1 x \,, x\rangle, \quad x \in H$.

   (iv) $P_0 P_1 = P_0$.

3. Sea H un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión tal que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1$$
   y sea $z \in H$ con $z \perp y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $z = 0$.

4. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Muestre que T es normal si y solo si $\|T^* x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in H$. En este caso, muestre que $\|T^2\| = \|T\|^2$.