

# Análisis Funcional

## Taller 10

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 17 de abril de 2020

1. Sea  $X$  un espacio pre-Hilbert y  $U \subseteq X$  un subespacio.
  - (a) Muestre que  $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$  es posible. ¿Se tiene alguna contención?
  - (b) Muestre que  $\overline{U} \oplus U^{\perp} \neq X$  es posible.
  
2. (a) Sea  $X$  un espacio normado,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  y  $x \in X$ . Muestre que lo siguiente es equivalente:
  - (i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$  converge incondicionalmente<sup>1</sup> a  $x$ .
  - (ii) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto finito  $A \subseteq \mathbb{N}$  tal que para todo conjunto finito  $B$  con  $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{b \in B} x_b - x \right\| < \varepsilon.$$

- (b) Dé un ejemplo de una serie que converge incondicionalmente pero que no converge absolutamente.
- 
3. Sea  $H$  un espacio de Hilbert.
    - (a) Muestre que  $H$  es reflexivo.
    - (b) Muestre que  $H'$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{H'} = \langle y, x \rangle_H$$

con  $\Phi : H \rightarrow H'$  como en el teorema de Riesz-Frechet. Muestre que la norma inducida por este producto interno es la norma de  $H'$ .

4. Sea  $H$  un espacio de Hilbert and  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  sesquilineal. En  $H \times H$  considere la norma  $\|(x, y)\| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ .
  - (a) Muestre que las siguientes son equivalentes:
    - (i)  $B$  es continua.
    - (ii)  $B$  es parcialmente continua, es decir, para cada  $x_0$  fijo,  $y \mapsto B(x_0, y)$  es continua para cada  $y_0$  fijo,  $x \mapsto B(x, y_0)$  es continua.
    - (iii)  $B$  es acotado, es decir, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$  para todo  $x, y \in H$ .
  - (b) Si  $B$  es continuo, entonces existe  $T \in L(H)$  tal que
 
$$B(x, y) = \langle Tx, y \rangle, \quad x, y \in H.$$
  - (c) Si además existe  $m > 0$  tal que  $B(x, x) \geq m\|x\|^2$ ,  $x \in H$ , entonces  $T$  es invertible y  $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$ .

<sup>1</sup>Sean  $x_\lambda$  vectores en un espacio normado  $X$ . La serie  $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$  converge incondicionalmente a  $x \in X$  si y solo si lo siguiente se tiene:

- (a)  $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$  es contable.
  - (b)  $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\lambda_j} = x$  para cualquier ordenamiento  $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ .
- En este caso se escribe  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ .