Universidad de los Andes, MATE-4330

Functional Analysis

Taller 8

Topología débil.

Fecha de entrega: 27 de marzo de 2020

---

1. Sea X un espacio normado.

   (a) Muestre que $(X, \|\cdot\|)' = (X, \sigma(X, X'))'$. Es decir: un funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\|\cdot\|$ si y sólo si es continua con respecto a la topología débil.

   (b) Sean $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria y $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada en X. ¿Siempre son débilmente cerradas (prueba o contraejemplo)?

2. Sean $1 < p < \infty$ y sea $X = \ell_p(\mathbb{N})$. Para $m < n$ defina $\varphi_{m,n} \in (\ell_p(\mathbb{N}))'$ por $\varphi_{m,n}(x) = x_n + x_m$ para $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Sea $A := \{\varphi_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\} \subset (\ell_p(\mathbb{N}))'$.

   (a) Muestre que A no contiene puntos de acumulación en la topología inducida por la norma en $(\ell_p(\mathbb{N}))'$.

   (b) Muestre que $A \subseteq \{\psi \in (\ell_p(\mathbb{N}))' : \|\psi\| \leq 2\}$.

   (c) Encuentre un punto de acumulación de A en la topología débil-$*$.

Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$. El *funcional de Minkowski* se define por

$$p_M : X \to [0, \infty], \quad p_M(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}x \in M\right\}.$$

El subconjunto M se llama

- *balanceado* si $\lambda M \subseteq M$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$;
- *absorbente* si $p_M(x) < \infty$ para todo $x \in M$.

---

3. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. Muestre que el funcional de Minkowski p_M es una seminorma en X.

4. Under construction.