Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 7

Proyecciones; convergencia débil.

Fecha de entrega: 13 de Marzo de 2020

---

1. Ejemplo de una proyección no acotada. Sea $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{N})$ y e_j el vector usual $e_j^k = \delta_j^k$. Defina

$$U := \overline{\operatorname{span}\{e_{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}}, \qquad V := \overline{\operatorname{span}\{e_1 + 2^{-1}e_2,\ e_3 + 2^{-2}e_4,\ e_5 + 2^{-3}e_6,\ \dots\}}.$$

   (a) Muestre que $U \cap V = \{0\}$.
   (b) Muestre que $\overline{U \oplus V} = \mathcal{H}$.
   (c) Muestre que $U \oplus V \neq \mathcal{H}$.
   (d) Defina el operador $P_0 : U \oplus V \to U \oplus V$, $P_0(x + y) = x$. Muestre que P_0 es una proyección no acotada.

2. Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y sean $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ funcionales lineales sobre X tal que $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \ker \varphi_j \subseteq \ker \psi$. Demuestre que $\psi \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$.

3. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una *sucesión débil de Cauchy* si para todo $\varphi \in X'$ la sucesión $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$.

   (a) Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Muestre que x es una sucesión débil de Cauchy si y solo si existe un subconjunto denso U' de X' tal que $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $\varphi \in U'$.
   (b) Toda sucesión débil de Cauchy en X es acotada.

4. Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$, y $x_0 \in X$, $\varphi_0 \in X'$.

   (a) Suponga que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi_0$. Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$.
   (b) Suponga que $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi_0$. ¿Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$?