Análisis Funcional

Taller 5

Teorema de Baire;
Principio de acotación uniforme.

Fecha de entrega: 28 de febrero de 2020

---

1. (a) Todo espacio métrico completo con infinitos elementos y ningún punto aislado es no enumerable.
   (b) Toda base algebraica de un espacio de Banach infinito dimensional es no enumerable.
   (c) Muestre que la hipótesis de completitud en el principio de acotación uniforme es necesaria.

2. Sean X, Y espacios de Banach, Y reflexivo, y $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ tal que $(\varphi(T_n x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in X$ y $\varphi \in Y'$. Entonces existe un $T \in L(X,Y)$ tal que $T_n \xrightarrow{w} T$.

3. Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que dado $\varepsilon > 0$ existe una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\|h - g\|_\infty < \varepsilon$, g es continua pero no es diferenciable en ningún punto.

   Ayuda: Dada una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $h \in (0, \frac{1}{2}]$, al menos uno de los siguientes términos está definido: $\left|\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|$ y $\left|\dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right|$. Defina $\Delta f(x,h)$ como el mayor de los dos términos (si alguno no está definido, no se tiene en cuenta). Note que $|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x,h)$. Defina ahora $U(\alpha, h) := \{f | \Delta f(x,h) \geq \alpha \text{ para } x \in [0,1]\}$ y $U_n = \bigcup_{h<\frac{1}{n}} \bigcup_{\alpha > n} U(\alpha, h)$.

   Pruebe que: (a) U_n es abierto en $C([0,1], \mathbb{R})$ dado $n \in \mathbb{N}$.
   (b) U_n es denso en $C([0,1], \mathbb{R})$ dado $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es un conjunto de funciones no diferenciables en ningún punto.

   Concluya lo enunciado en el comienzo.

4. Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y tome $a \leq t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leq b$ y $\alpha_k^{(n)} \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$. Para $f \in C([a,b])$ se define

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\, f(t_k^{(n)}).$$

   Muestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

   (a) $Q_n(f) \to \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,\ n \to \infty$, para todo $f \in C[a,b]$.

   (b) $Q_n(p) \to \displaystyle\int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t,\ n \to \infty$, para todo polinomio $p : [a,b] \to \mathbb{K}$ y $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(n)}| < \infty$.