Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 4

Hahn Banach, espacios duales II.

Fecha de entrega: 21 de febrero 2020

---

1. Un *isomorfismo entre espacios normados* X y Y es un homeomorfismo lineal. Pruebe las siguientes afirmaciones.

   (a) Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre los espacios normados X y Y, entonces $T' : Y' \to X'$ es un isomorfismo. Si T es adicionalmente isométrico, T' también lo es. Si X y Y son espacios de Banach, el converso también vale (es decir: Si T' es un isomorfismo [isométrico], entonces T lo es).

   (b) Si un espacio normado Y es isomorfo a un espacio de Banach reflexivo X, entonces Y es un espacio de Banach reflexivo.

2. Sea X un espacio normado separable y $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X'. Entonces existe una subsucesión $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $x'_0 \in X'$ tal que

   $$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}(x) = x'_0(x), \qquad x \in X.$$

   Es cierto esto sin la hipótesis de que X sea separable?

3. Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Sea

   $$L = \{f \in X' \mid f(x) = 0 \ \text{ para todo } x \in M\}.$$

   Muestre que L es un subespacio cerrado de X' y que M' es isométricamente isomorfo a X'/L.

4. Muestre que en $l_1(\mathbb{N})$ la convergencia débil y la convergencia en norma coinciden.