Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis funcional

Taller 2

Operadores lineales.

Fecha de entrega: 7 de febrero de 2020

---

1. Sea X un espacio compacto, $C_{\mathbb{R}}(X)$ el conjunto de funciones continuas real-evaluadas sobre X y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado.
   (a) Considere el mapa $\varrho : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ definido por $\varrho(f) = f|_Y$. Muestre que $I := \ker(\varrho)$ es un subespacio cerrado de $C_{\mathbb{R}}(X)$.
   (b) Sea $\widetilde{\varrho} : C_{\mathbb{R}}(X)/I \to C_{\mathbb{R}}(Y)$ el mapa inducido en el espacio cociente. Pruebe que $\widetilde{\varrho}$ es una isometría.
   (c) Demuestre que $\operatorname{rg}(\varrho)$ es completo.

2. Sean X y Y espacios normados con X de dimensión finita. Muestre que toda función lineal $T : X \to Y$ es acotada.

3. (a) Sea $X = C([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Muestre que

$$T : X \to \mathbb{C}, \qquad Tx = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

   es un operador lineal y acotado. ¿Cuál es su norma?
   (b) Ahora considere X con la norma

$$\|x\|_p := \Big(\int_a^b |x(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}, \qquad x \in X,$$

   para $1 \le p < \infty$. ¿Sigue siendo T acotado? Si es así, calcule su norma.
   (Si no han visto teoría de medida, indíquenlo claramente y hagan el ejercicio solo para $p = 1$).

4. Sea $1 \le p < \infty$. Para $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ sea $T : \ell_p(\mathbb{N}) \to \ell_p(\mathbb{N})$ definido por $(Tx)_n = x_n z_n$ para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Muestre que $T \in L(\ell_p(\mathbb{N}))$ y calcule $\|T\|$.