Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 14

Operadores no negativos, operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Mayo 7 de 2015

---

1. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal densamente definido y cerrado. Muestre:
   (a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
   (b) $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ donde $\partial\sigma(T)$ denota la frontera de $\sigma(T)$ en $\mathbb{C}$.
   (c) Si X es un espacio de Hilbert y T es autoadjunto, entonces $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.

2. Determine todas las funciones continuas $\tau : [0,1] \to [0,1]$ tales que
$$A : C[0,1] \to C[0,1], \qquad Af := f \circ \tau$$
   es compacto.

3. Sea $X = C[0,1]$ y $k \in C[0,1]^2$ y defina
$$T : X \to X, \qquad (Tx)(t) = \int_0^t k(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s.$$
   (a) Muestre que T es compacto.
   (b) Muestre que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$.
   (c) Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para todo $y \in X$ existe exactamente un $x \in X$ tal que $(T - \lambda)x = y$.

4. Sea H un espacio de Hilbert, y sea $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesion ortonormal. Sea $\{\lambda_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Defina:
$$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$
   Muestre que A es autoadjunto y compacto si y solo si $\lambda_k \to 0$.