Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis Funcional

Taller 9

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 26 de marzo de 2015

---

1. Sea $w \in C([0,1],\mathbb{R})$. Para $x, y \in C([0,1])$ se define

$$\langle x\,, y\rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Halle una condición necesaria y suficiente sobre w para que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ sea un producto interno.Bajo qué condición la norma inducida por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ es equivalente a la norma usual de L_2?

2. Sea X un espacio pre-Hilbert, $U \subseteq H$ un subespacio denso y $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0\,, u\rangle = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que $x_0 = 0$.

3. ¿Existe algún producto interno $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ en $C[0,1]$ tal que $\langle x, x\rangle = \|x\|_\infty^2$ para todo $x \in C[0,1]$?

Sea X un espacio pre-Hilbert. Dos elementos $x, y \in X$ son *perpendiculares* si $\langle x\,, y\rangle = 0$. Notación: $x \perp y$.

4. Para x, y en un espacio pre-Hilbert X demuestre:
   (a) Si $x \perp y$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ¿El converso es cierto en general? ¿Hay algún caso para el que se tenga?
   (b) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $x \perp y$ demuestre que el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente. ¿Como se puede generalizar este resultado?
   (c) $x \perp y$, si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo escalar α.