Functional Analysis

Taller 8

Topología débil.

Fecha de entrega: 19 de marzo de 2015

---

1. Sea X un espacio normado.

   (a) Muestre que $(X, \|\cdot\|)' = (X, \sigma(X, X'))'$. Es decir: un funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\|\cdot\|$ si y sólo si es continua con respecto a la topología débil.

   (b) Sean $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria y $K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada en X. ¿Siempre son débilmente cerradas (prueba o contraejemplo)?

2. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. Muestre que el funcional de Minkowski p_M es una seminorma en X.

3. Sean $1 < p < \infty$ y sea $X = \ell_p(\mathbb{N})$. Para $m < n$ defina $\varphi_{m,n} \in (\ell_p(\mathbb{N}))'$ por $\varphi_{m,n}(x) = x_n + x_m$ para $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$. Sea $A := \{\varphi_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\} \subset (\ell_p(\mathbb{N}))'$.

   (a) Muestre que A no contiene puntos de acumulación en la topología inducida por la norma en $(\ell_p(\mathbb{N}))'$.

   (b) Muestre que $A \subseteq \{\psi \in (\ell_p(\mathbb{N}))' : \|\psi\| \leq 2\}$.

   (c) Encuentre un punto de acumulación de A en la topología débil-$*$.

4. (a) Sea X un espacio normado y $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente dentro de V con $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $x \in V$.

   (b) Sea X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión débilmente convergente a x_0. Muestre que existe una sucesión

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

   de elementos que son combinaciones lineales finitas de los $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente en norma hacia x_0.

   Ayuda. Puede usar la siguiente forma del teorema de Hahn-Banach:
   Sea X un espacio normado, $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $x \notin V$. Entonces existen $\varphi \in X'$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathrm{Re}(\varphi(x)) < \mathrm{Re}(\varphi(x)) + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\varphi(v))$ para todo $v \in V$.