

# Análisis Funcional

## Taller 6

Operadores cerrados.

Fecha de entrega: 5 de marzo de 2015

---

Sean  $X, Y, Z$  espacios de Banach y  $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$  un operador lineal.

- (a) Sea  $S : X \supseteq \mathcal{D}(S) \rightarrow Y$  un operador lineal. Entonces la *suma de operadores*  $S + T$  se define como

$$\mathcal{D}(S + T) := \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \quad (S + T)x := Sx + Tx.$$

- (b) Sea  $R : Y \supseteq \mathcal{D}(R) \rightarrow Z$  un operador lineal. Entonces el *producto de operadores* o *composición*  $RT$  se define como

$$\mathcal{D}(RT) := \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(R)\}, \quad (RT)x := R(Tx).$$

1. Sean  $X, Y, Z$  espacios de Banach,  $R \in L(X, Y)$ ,  $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$ ,  $S : Y \supseteq \mathcal{D}(S) \rightarrow Z$  operadores lineales cerrados. Muestre que:

- (a)  $R + T$  es un operador lineal cerrado.
- (b)  $SR$  es cerrado.
- (c) Si  $S$  es continuamente invertible (i. e.,  $S^{-1} : \text{rg}(S) \rightarrow Y$  existe y es continuo), entonces  $ST$  es cerrado.

Muestre además que estas afirmaciones siguen siendo válidas cambiando “cerrado” por “clausurable”

2. Sea  $X = \ell_2(\mathbb{N})$  y

$$T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow X, \quad Tx = (nx_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{para} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Diga si  $T$  es cerrado con:

- (a)  $\mathcal{D}(T) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : (nx_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})\}$ ,
- (b)  $\mathcal{D}(T) = d = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) : x_n \neq 0 \text{ para solo finitos } n\}$ .

3. Let  $X$  un espacio de Banach,  $n \in \mathbb{N}$  y  $T$  un operador lineal densamente definido de  $X$  en  $K^n$ . Muestre que  $T$  es cerrado si y solo si  $T \in L(X, \mathbb{K}^n)$ .

4. Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados y  $T : X \supseteq \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$  un operador lineal cerrado.

- (a) Sea  $K \subset X$  compacto. Muestre que  $T(K)$  es cerrado en  $Y$ .
- (b) Muestre que si  $F$  es un compacto en  $Y$  entonces  $T^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ .
- (c) ¿Si  $A$  es cerrado en  $X$ , es cierto que  $T(A)$  es cerrado?