

Análisis funcional

Taller 3

Hahn Banach, Espacios duales.

Fecha de entrega: 12 de Febrero de 2015

1. Demuestre el teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos.

Sugerencia: Para un espacio vectorial sobre los complejos X muestre que:

(a) Sea $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional \mathbb{R} -lineal, entonces

$$V_\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad V_\varphi(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix),$$

es un funcional \mathbb{C} -lineal sobre X con $\operatorname{Re}V_\varphi = \varphi$.

(b) Sea $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional \mathbb{C} -lineal con $\operatorname{Re}\lambda = \varphi$, entonces $V_\varphi = \lambda$.

(c) Sea p una seminorma sobre X y φ, V_φ definido como en el punto anterior. Si φ es acotado, entonces

$$|\varphi(x)| \leq p(x) \iff |V_\varphi(x)| \leq p(x), \quad x \in X.$$

(d) $\|\varphi\| = \|V_\varphi\|$ si φ es acotado.

2. En $X = \ell_2(\mathbb{N})$ considere el subespacio

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ excepto para un número finito de índices } n\}.$$

Sea V un complemento algebraico de U en X , i. e., U es un subespacio tal que $U + V = X$ y $U \cap V = \{0\}$. Muestre que

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{para } x = u + v \text{ con } u \in U, v \in V$$

es un funcional lineal bien definido y no acotado.

3. (a) Sea $c \subseteq \ell_\infty$ el conjunto de las sucesiones convergentes. Muestre que el funcional

$$\varphi_0 : c \rightarrow \mathbb{K}, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

es continuo y calcule su norma.

(b) Sea $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las sucesiones acotadas en \mathbb{R} con la norma del supremo. Muestre que existe $\varphi \in (\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

4. Sea X un espacio normado, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo y $K = \ker f$

(a) Muestre que $\dim(X/K) = 1$.

(b) Muestre que f es continuo si y solo si $\ker f$ es cerrado.