Universidad de los Andes, MATE-4330

Análisis funcional

Taller 1

Espacios métricos y normados.

Fecha de entrega: 29 de enero de 2015

---

1. Sea X un espacio normado. Muestre que:
   (a) Todo subespacio finito-dimensional de X es cerrado.
   (b) Si V es un subespacio finito-dimensional de X y W es un subespacio cerrado de X, entonces
   $$V + W := \{v + w : v \in V,\ w \in W\}$$
   es un subespacio cerrado de X.

2. Sea T un conjunto y $\ell_\infty(T)$ el conjunto de todas la funciones $x : T \to K$ con
   $$\|x\|_\infty := \sup\{|x(t)| : t \in T\} < \infty.$$
   Muestre que $(\ell_\infty(T), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

3. Considere el espacio de sucesiones d, c_0, c definidos como en el Ejemplo 1.14.
   (a) Muestre que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ y $(c, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.
   (b) Muestre que $(d, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado, pero no es completo.

4. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Muestre que X es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente es convergente.