Universidad de los Andes, MATE-4330
Rafael Montoya
David Perdomo

Análisis Funcional

Taller 15

Fecha de entrega: Mayo 21 de 2013

---

1. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $K \in L(H_1, H_2)$ un operador compacto. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de proyecciones con $P_n \xrightarrow{s} \mathrm{id}$. Muestre que $\|K - KP_n\| \to 0$.

2. Sea X un espacio de Banach y $T(X \to X)$ un operador lineal densamente definido y cerrado. Muestre:
   (a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
   (b) $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ donde $\partial\sigma(T)$ denota la frontera de $\sigma(T)$ en $\mathbb{C}$.
   (c) Si X es un espacio de Hilbert y T es autoadjunto, entonces $\sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$.

3. Sea S el right-shift en $\ell_2(\mathbb{Z})$ definido por:
$$(Sx)_k = x_{k-1},\ k \in \mathbb{Z}$$
donde $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ pertenece a $\ell_2(\mathbb{Z})$. Determine $\sigma_p(S), \sigma_c(S), \sigma_r(S)$.

4. Sean X y Y espacios de Banach y T_1 y T_2 operadores lineales compactos que van de X a Y. Muestre que $T_1 + T_2$ es un operador lineal compacto de X en Y. Muestre además que dado un funcional $\varphi \in X'$ y un $y \in X$, entonces el operador $T : X \longrightarrow X$ definido por $T(x) = f(x)y$ es un operador lineal compacto.