Universidad de los Andes, MATE-4330
David Perdomo

# Análisis Funcional

Taller 14

Operadores no negativos, operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Mayo 8 de 2013

---

1. Determine todas las funciones continuas $\tau : [0,1] \to [0,1]$ tales que

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \qquad Af := f \circ \tau$$

es compacto.

2. Sea $X = C[0,1]$ y $k \in C[0,1]^2$ y defina

$$T : X \to X, \qquad (Tx)(t) = \int_0^t k(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s$$

   (a) Muestre que $T$ es compacto.
   (b) Muestre que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$.
   (c) Muestre que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y para todo $y \in X$ existe exactamente un $x \in X$ tal que $(T - \lambda)x = y$.

3. Sea $H$ un espacio de Hilbert, y sea $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesion ortonormal. Sea $\{\lambda_n\}_{\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Defina:

$$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

Muestre que A es autoadjunto y compacto si y solo si $\lambda_k \to 0$.

4. Defina $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N})$ por

$$Tx = \Big(0, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_3}{2^2}, \ldots, \frac{x_1 + x_{n+1}}{2^n}, \ldots\Big).$$

Muestre que $T$ es compacto y determine $\|T\|$, $\sigma(T)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$ y $\sigma_{\mathrm{r}}(T)$.