

# Análisis Funcional

Taller 12

Operadores no negativos, operadores adjuntos.

Fecha de entrega: Abril 24 de 2013

---

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $S$  y  $T$  son operadores en  $L(H)$  autoadjuntos, decimos que  $T$  es *no negativo* ( $T \geq 0$ ) si  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in H$  y  $T \leq S$  si  $S - T \geq 0$ . Una sucesión  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(H)$  es *creciente* si  $T_n \leq T_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es *decreciente* si  $(-T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente.

1. Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada y monótonamente creciente de operadores autoadjuntos. Muestre que la sucesión converge en el sentido fuerte a un operador autoadjunto.
2. Sea  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión monótona de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert  $H$ . Muestre que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en el sentido fuerte a una proyección ortogonal  $P$  y además
  - (a)  $\text{rg } P = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{rg } P_n}$  si  $P_n$  es creciente.
  - (b)  $\text{rg } P = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{rg } P_n}$  si  $P_n$  es decreciente.
3. Sean  $H_1, H_2$  y  $H_3$  espacios de Hilbert y  $S(H_1 \rightarrow H_2)$  y  $T(H_2 \rightarrow H_3)$  operadores lineales densamente definidos.
  - (a) Si  $T \in L(H_2, H_3)$  entonces  $TS$  es densamente definido y  $(TS)^* = S^*T^*$ .
  - (b) Si  $S$  es inyectivo y  $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$  entonces  $TS$  es densamente definido y  $(TS)^* = S^*T^*$ .
  - (c) Si  $S$  es inyectivo y  $S^{-1} \in L(H_2, H_1)$  entonces  $S^*$  es inyectivo y  $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$ .
4. Sean  $H_1, H_2$  espacios de Hilbert y  $U : H_1 \times H_2 \rightarrow H_2 \times H_1$ ,  $U(x, y) = (-y, x)$ . Entonces
  - (a)  $U$  es unitario.
  - (b) Si  $T(H_1 \rightarrow H_2)$  es densamente definido,
$$G(T^*) = [U(G(T))]^\perp = U(G(T)^\perp).$$
    - (c)  $T^*$  es cerrado.
    - (d) Si  $T$  es clausurable,  $T^*$  es densamente definido y  $T^{**} = \overline{T}$ .