Universidad de los Andes, MATE-4330
Rafael Montoya

# Análisis Funcional

Taller 11

Proyecciones, Bases ortonormales y
Operadores Normales

Fecha de entrega: 17 de Abril de 2012

---

1. Sea $H$ un espacio de Hilbert, $V, W \subseteq H$ subespacios cerrados y $P_V$, $P_W$ sus correspondientes proyecciones ortogonales.

   (a) Muestre que
   $$V \subseteq W \quad \Longleftrightarrow \quad P_V = P_V P_W = P_W P_V.$$

   (b) Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (i) $P_V P_W = 0$.

   (ii) $V \perp W$.

   (iii) $P_V + P_W$ es una proyección ortogonal.

   Muestre que $\mathrm{rg}(P_V + P_W) = V \oplus W$ si alguna de las condiciones anteriores se tiene.

2. Sea $H$ un espacio de Hilbert y $P_0$, $P_1$ las proyecciones ortogonales sobre $H_0$, $H_1 \subseteq H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalenteas:

   (i) $H_0 \subseteq H_1$,

   (ii) $\|P_0 x\| \leq \|P_1 x\|, \quad x \in H$.

   (iii) $\langle P_0 x\,, x\rangle \leq \langle P_1 x\,, x\rangle, \quad x \in H$.

   (iv) $P_0 P_1 = P_0$.

3. Sea $H$ un espacio de Hilbert separable, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H, y, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - y_n|| < 1$$
   y $z \perp y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $z = 0$.

4. Sea $H$ un espacio de Hilbert complejo y $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Muestre que $T$ es normal si y solo si $||T^* x|| = ||Tx||$ para todo $x \in H$. En este caso, muestre que $||T^2|| = ||T||^2$.