Universidad de los Andes, MATE-4330
Rafael Montoya

# Análisis Funcional

Taller 9

Espacios de Hilbert y pre-Hilbert

Fecha de entrega: 3 de Abril de 2013

---

Los problemas 1,2 y 3 son obligatorios. De los dems escoja por lo menos uno.

1. Sea $X$ un espacio pre-Hilbert, $U \subseteq H$ un subespacio denso y $x_0 \in X$ tal que $\langle x_0 \, , u \rangle = 0$ para todo $u \in U$. Muestre que $x_0 = 0$.

2. ¿Existe algún producto interno $\langle \cdot \, , \, \cdot \rangle$ en $C[0,1]$ tal que $\langle x, x \rangle = \|x\|_\infty^2$ para todo $x \in C[0,1]$ ?

3. Sea $X$ un espacio pre-Hilbert y $U \subseteq X$ un subespacio.
   (a) Muestre que $\overline{U} \neq U^{\perp\perp}$ es posible. ¿Se tiene alguna contenencia?
   (b) Muestre que $\overline{U} \oplus U^{\perp} \neq X$ es posible.

4. Sea $X$ un espacio pre-Hilbert. Muestre los siguientes resultados
   (a) Sean $x, y \in X$ con $x \perp y$, entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ¿El converso es cierto en general? ¿Hay algún caso para el que se tenga?
   (b) Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $x \perp y$ muestre que el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente. ¿Como se puede generalizar este resultado?
   (c) $x \perp y$, si y solo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo escalar $\alpha$.

5. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $f \in L_p(\mathbb{R})$ y $s \in \mathbb{R}$ defina $T_s : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ como $(T_s f)(t) := f(t - s)$. Claramente los $T_s$ son isometrias lineales.
   (a) Sea $1 \leq p < \infty$. Muestre que $T_s \xrightarrow{s} \mathrm{id}$ para $s \to 0$. Los $T_s$ convergen en norma?
   (b) Los $T_s$ convergen en norma o convergen fuertemente en el caso $p = \infty$?

6. Muestre que $W^m(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ y $H_0^m(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

*Para el problema 6:* Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ definimos el conjunto de *funciones de prueba*

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \ \text{ es compacto}\}.$$

Para un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ se define $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $D^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \varphi$ si la derivada existe.
Sea $f \in L_2(\Omega)$. Una función $g \in L_2(\Omega)$ se llama la *derivada débil* $\alpha$-ésima de $f$ si

$$\langle g \, , \varphi \rangle = (-)^{|\alpha|} \langle f \, , D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Note que la derivada débil es única si existe; se denota por $D^{(\alpha)}f$.
Para $m \in \mathbb{N}$ definimos el *espacio de Sobolev*

$$W^m(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : D^{(\alpha)}f \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(\Omega)$ es un producto interior con

$$\langle f\,, g\rangle_{W^m} := \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^{(\alpha)}f\,, D^{(\alpha)}g\rangle_2.$$

Además, definimos los espacios

$$H^m(\Omega) := \overline{C^m(\Omega) \cap W^m(\Omega)} \qquad \text{and} \qquad H_0^m(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$$

donde la clausura es tomada con respecto a la norma inducida por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{W^m}$.