Universidad de los Andes, MATE-4330
David Perdomo

Functional Analysis

Taller 8

Hilbert spaces.

Fecha de entrega: 22 de marzo de 2012

---

1. Sea X un espacio vectorial y $M \subseteq X$ un subconjunto convexo, balanceado y absorbente. Muestre que el funcional de Minkowski p_M es una seminorma en X.

2. Suponga A, B subconjuntos convexos no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial topológico real X localmente convexo. Fije $a_0 \in A, b_0 \in B$ y $x_0 := b_0 - a_0$. Considere $M := \operatorname{span}\{x_0\}$, y defina $f : M \to \mathbb{R}$ así: $f(tx_0) = t$.

   (a) Suponga que A es abierto. Pruebe que existe $\varphi \in X'$ que extiende a f tal que existe $\gamma \in \mathbb{R}$ de manera que para todo $a \in A$ y $b \in B$:
   $$\varphi(a) < \gamma \leq \varphi(b).$$

   (b) Adicionalmente muestre que si $A = \{a_0\}$ y que B es cerrado, se puede lograr una mejor separación, en el sentido que existen γ_1 y γ_2 con:
   $$\varphi(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \varphi(b)$$

   Hint: Considere en el literal (a) el conjunto $C := A - B + x_0$ y el funcional de Minkowski sobre él. Para el literal (b), recuerde que con las condiciones dadas existe un vecindario convexo V de cero tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$.

3. Ejemplo de una proyección no acotada. Sea $\mathcal{H} = l_2$ y e_i el vector usual $e_i^j = \delta_i^j$. Defina
   $$L_1 := \overline{\operatorname{span}\{e_{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}}, \qquad L_2 := \overline{\operatorname{span}\left\{e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_3 + \frac{1}{2^2}e_4, e_5 + \frac{1}{2^3}e_6, \dots\right\}}.$$

   (a) Muestre que $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.
   (b) Muestre que $\overline{L_1 \oplus L_2} = \mathcal{H}$.
   (c) Muestre que $L_1 \oplus L_2 \neq \mathcal{H}$.
   (d) Defina el operador $P_0 : L_1 \oplus L_2 \to L_1 \oplus L_2$, $P_0(x + y) = x$. Muestre que P_0 es una proyección no acotada.

4. Sea $w \in C([0,1], \mathbb{R})$. Para $x, y \in C([0,1])$ se define
   $$\langle x\,, y\rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Halle una condición necesaria y suficiente sobre w para que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ sea un producto interno.Bajo qué condición la norma inducida por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_w$ es equivalente a la norma usual de L_2?