Universidad de los Andes, MATE-4330
Rafael Montoya

Análisis Funcional

Taller 7

Topología débil.

Fecha de entrega: 13 de Marzo de 2013

---

1. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una *sucesión débil de Cauchy* si para todo $\varphi \in X'$ la sucesión $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$.

   (a) Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X. Muestre que x es una sucesión débil de Cauchy si y solo si existe un subconjunto denso U' de X' tal que $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $\varphi \in U'$.

   (b) Toda sucesión débil de Cauchy en X es acotada.

2. Sea X un espacio de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X'$, y $x_0 \in X$, $\varphi_0 \in X'$.

   (a) Suponga que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi_0$. Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$.

   (b) Suponga que $x_n \xrightarrow{w} x_0$ y $\varphi_n \xrightarrow{w*} \varphi_0$. ¿Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) = \varphi_0(x_0)$?

3. Sea X un espacio normado.

   (a) Muestre que $(X, \|\cdot\|)' = (X, \sigma(X, X'))'$. Es decir: un funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}$ es continua con respecto a la topología inducida por $\|\cdot\|$ si y sólo si es continua con respecto a la topología débil.

   (b) Sean $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria y $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la bola unitaria cerrada en X. ¿Siempre son débilmente cerradas (prueba o contraejemplo)?

4. (a) Sea X un espacio normado y $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión debílmente convergente dentro de V con $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces $x \in V$.

   (b) Sea X un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión débilmente convergente a x_0. Muestre que existe una sucesión

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

   de elementos que son combinaciones lineales finitas de los $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente en norma hacia x_0.

   Ayuda. Puede usar la siguiente forma del teorema de Hahn-Banach:
   Sea X un espacio normado, $V \subseteq X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $x \notin V$. Entonces existen $\varphi \in X'$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathrm{Re}(\varphi(x)) < \mathrm{Re}(\varphi(x)) + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\varphi(v))$ para todo $v \in V$.