

**Taller 3**

- Fecha de entrega: 13 de abril de 2016. La entrega es voluntaria. El taller no afecta de ninguna manera su nota. Puede entregar todo el taller o solo partes de él.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria<sup>1</sup> a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

**Problem 1.** Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{4^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x+2)^n.$$

**Problem 2.** Determine todos los números reales  $x$  para los cuales las series convergen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right)^x, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n.$$

**Problem 3.** Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones. Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

$$(a) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-5x} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(b) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{7-3x} \quad \text{centrada en } a = 2,$$

$$(c) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2x^2+3} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(d) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{9x-6} \quad \text{centrada en } a = 1,$$

$$(e) f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^3-3x+3x^2-1} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(f) f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4} \quad \text{centrada en } a = 2,$$

<sup>1</sup>Sec. 2: Rafael Mantilla;

Sec. 3: Yacir Ramírez;

Sec. 4: Yacir Ramírez;

Sec. 5: Juan Pablo Lievano.

- (g)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \arctan x$  centrada en  $a = 0$ ,  
 (h)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  centrada en  $a = 4$ .

**Problem 4.** Encuentre la serie de Taylor de las siguientes funciones. Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  centrada en  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  
 (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 7)$  centrada en  $a = 3$ .  
 (c)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x + 1}$  centrada en  $a = 0$ .

**Problem 5.** Muestre que

$$\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3} |x|^3 \quad \text{para } x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

En particular,  $\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{\pi^3}{96}$  para  $x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ .

*Ayuda:* Use la serie de Taylor de  $f(x) = -\log(\cos x)$ .

**Problem 6.** Muestre que  $\int e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$ .

**Problem 7.** Estime  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$  correcta a tres lugares decimales.

**Problem 8.** Calcule  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \dots$

*Hint.* Serie de potencias de arctan.

**Problem 9.** Encuentre  $\arg(8)$ ,  $\arg(-8)$ ,  $\arg(-\sqrt{3} - i)$ .

**Problem 10.** Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

- (a)  $\frac{5 - 3i}{-4 + 3i}$ , (b)  $i^{-7}$ , (c)  $e^{2 \ln 2 + i \frac{7\pi}{6}}$ .  
 (d)  $(-\sqrt{3} - i)^3$ , (d)  $\cos\left(1 + \frac{i\pi}{4}\right)$ .

**Problem 11.**

- (a) Calcule  $\left( \frac{1 + i}{(\sin i)^2 + (\cos i)^2} \right)^{17}$ .

- (b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación  $z^5 = -2 - 2i\sqrt{3}$ .  
(c) Encuentre todos los números reales  $x, y$  que satisfacen la relación dada:

(a)  $e^{x+iy} = -\pi$ ,                      (b)  $\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$ .

---

**Problem 12.** Encuentre la solución general de

- (a)  $\tan x \cos y = y' \tan y$ ,  
(b)  $yy' = e^{x+2y} \sin x$ ,  
(c)  $xy' + y = y^2 x^2 \ln x$ ,       $x > 0$ ,  
(d)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ,      *Ayuda. Use la substitución  $u = \frac{y}{x}$ .*

**Problem 13.** Encuentre la solución de  $y\sqrt{1-x^2}y' = x$ ,  $y(0) = -3$ .

**Problem 14.** Un tanque contiene 200 gal de agua salada con 15 lb de sal disuelta. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 2 gal/min.

- (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t \geq 0$ .  
(b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.  
(c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 15 minutos.  
(d) ¿Cual es la máxima cantidad de sal que puede llegar a tener el tanque?  
(e) ¿Como cambia el resultado en (a) si el agua salada entra a razón de 4 gal/min en vez de 2 gal/min?

**Problem 15.** Encuentre la solución general de

- (a)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ,  
(b)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ ,  
(c)  $3y'' - 12y' + 9y = 0$ .

**Problem 16.** Encuentre la solución general de

- (a)  $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$ ,  
(b)  $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ ,  
(c)  $y'' - 3y = 2e^{2x} \sin(x)$ ,  
(d)  $y'' + 4y = 3x \cos x$ .  
(e)  $y'' + y = \cot^2 x$ ,  
(f)  $y'' - y = \frac{1}{1+e^x}$ ,

**Problem 17.** Encuentre la solución general de

- (a)  $y'' + 2y' - 15y = e^{2x}$ ,
- (b)  $y'' + 2y' - 15y = e^{5x}$ ,
- (c)  $y'' + 2y' - 15y = \sin(5x)$ ,
- (d)  $y'' - 8y' + 16y = x^3 + x$ ,
- (e)  $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$ .

**Problem 18.** Encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 10xe^{2x} \cos(x).$$

**Problem 19.** Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

**Problem 20.** Encuentre la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' - y = 4x^2 e^{3x}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$