

Taller 3

- Fecha de entrega: 13 de abril de 2016. La entrega es voluntaria. El taller no afecta de ninguna manera su nota. Puede entregar todo el taller o solo partes de él.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria¹ a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

Problem 1. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{4^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x+2)^n.$$

Problem 2. Determine todos los números reales x para los cuales las series convergen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^x, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n.$$

Problem 3. Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones. Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

$$(a) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-5x} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(b) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{7-3x} \quad \text{centrada en } a = 2,$$

$$(c) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2x^2+3} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(d) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{9x-6} \quad \text{centrada en } a = 1,$$

$$(e) f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^3-3x+3x^2-1} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(f) f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4} \quad \text{centrada en } a = 2,$$

¹Sec. 2: Rafael Mantilla;

Sec. 3: Yacir Ramírez;

Sec. 4: Yacir Ramírez;

Sec. 5: Juan Pablo Lievano.

- (g) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctan x$ centrada en $a = 0$,
 (h) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ centrada en $a = 4$.

Problem 4. Encuentre la serie de Taylor de las siguientes funciones. Calcule el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ centrada en $a = \frac{\pi}{2}$,
 (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 7)$ centrada en $a = 3$.
 (c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 1}$ centrada en $a = 0$.

Problem 5. Muestre que

$$\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3} |x|^3 \quad \text{para } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

En particular, $\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{\pi^3}{96}$ para $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Ayuda: Use la serie de Taylor de $f(x) = -\log(\cos x)$.

Problem 6. Muestre que $\int e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$.

Problem 7. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ correcta a tres lugares decimales.

Problem 8. Calcule $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \dots$

Hint. Serie de potencias de arctan.

Problem 9. Encuentre $\arg(8)$, $\arg(-8)$, $\arg(-\sqrt{3} - i)$.

Problem 10. Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

- (a) $\frac{5 - 3i}{-4 + 3i}$, (b) i^{-7} , (c) $e^{2 \ln 2 + i \frac{7\pi}{6}}$.
 (d) $(-\sqrt{3} - i)^3$, (d) $\cos\left(1 + \frac{i\pi}{4}\right)$.

Problem 11.

(a) Calcule $\left(\frac{1 + i}{(\sin i)^2 + (\cos i)^2} \right)^{17}$.

- (b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación $z^5 = -2 - 2i\sqrt{3}$.
(c) Encuentre todos los números reales x, y que satisfacen la relación dada:

(a) $e^{x+iy} = -\pi$, (b) $\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$.

Problem 12. Encuentre la solución general de

- (a) $\tan x \cos y = y' \tan y$,
(b) $yy' = e^{x+2y} \sin x$,
(c) $xy' + y = y^2 x^2 \ln x$, $x > 0$,
(d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, *Ayuda. Use la substitución $u = \frac{y}{x}$.*

Problem 13. Encuentre la solución de $y\sqrt{1-x^2}y' = x$, $y(0) = -3$.

Problem 14. Un tanque contiene 200 gal de agua salada con 15 lb de sal disuelta. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 2 gal/min.

- (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.
(b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.
(c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 15 minutos.
(d) ¿Cual es la máxima cantidad de sal que puede llegar a tener el tanque?
(e) ¿Como cambia el resultado en (a) si el agua salada entra a razón de 4 gal/min en vez de 2 gal/min?

Problem 15. Encuentre la solución general de

- (a) $y'' + 6y' + 13y = 0$,
(b) $y'' - 8y' + 16y = 0$,
(c) $3y'' - 12y' + 9y = 0$.

Problem 16. Encuentre la solución general de

- (a) $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$,
(b) $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$,
(c) $y'' - 3y = 2e^{2x} \sin(x)$,
(d) $y'' + 4y = 3x \cos x$.
(e) $y'' + y = \cot^2 x$,
(f) $y'' - y = \frac{1}{1+e^x}$,

Problem 17. Encuentre la solución general de

- (a) $y'' + 2y' - 15y = e^{2x}$,
- (b) $y'' + 2y' - 15y = e^{5x}$,
- (c) $y'' + 2y' - 15y = \sin(5x)$,
- (d) $y'' - 8y' + 16y = x^3 + x$,
- (e) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$.

Problem 18. Encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 10xe^{2x} \cos(x).$$

Problem 19. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Problem 20. Encuentre la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' - y = 4x^2 e^{3x}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$