Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2016-1

Taller 2

- Fecha de entrega: **1 de marzo de 2016 en las clases complementarias**. La entrega es voluntaria. El taller no afecta de ninguna manera su nota. Puede entregar todo el taller o solo partes de él.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

Problem 1. Halle el límite de la sucesión $\left(\frac{3}{2+\ln n} - 3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ usando ϵ y N.

Problem 2. Halle el límite de la sucesión $\left(2 + \mathrm{e}^{\frac{3n}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ usando ϵ y N.

Problem 3. ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

(a) $\left(\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (b) $\left(\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (c) $\left(\dfrac{(-1)^n n^7 + 8n^{15}}{n^{15}\arctan n + (\cos n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(d) $\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (e) $\left(\dfrac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (f) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$,

(g) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (h) $\left(\dfrac{5^n}{3^n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (i) $\left(\dfrac{x^{51n}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Problem 4. ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

(a) $\left(\dfrac{\sec\frac{1}{n} + 3\mathrm{e}^{2n} + 8n^{15}}{n^{15} + \mathrm{e}^n\sqrt{1+\mathrm{e}^{2n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (b) $\left(\dfrac{\cos(n!)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (c) $\left(\sqrt[2n]{(2n!)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(d) $\left(n^2(1-\cos(\frac{1}{n}))\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (e) $(\log(\log n))_{n=3}^{\infty}$, (f) $\left(\sqrt[n]{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x \geq 0)$.

[1] Sec. 2: Rafael Mantilla; Sec. 3: Yacir Ramírez; Sec. 4: Yacir Ramírez; Sec. 5: Juan Pablo Lievano.

Problem 5. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

Hint. Se puede mostrar que la sucesión es acotada por 350.

Problem 6. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

Problem 7. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiónes de números reales. Pruebe o halle un contraejemplo

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es acotada.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces diverge.

(c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada por arriba, entonces diverge a ∞.

(d) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞, entonces $\text{lím}_{n\to\infty}\big(x_n + y_n\big) = \infty$.

(e) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces $\text{lím}_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(f) Si $(y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces por lo menos una de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

(g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si las sucesiones $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y tienen el mismo límite.

(h) Muestre: $\text{lím}_{n\to\infty} x_n$ existe $\implies$ $\text{lím}_{n\to\infty} |x_n|$ existe y en este caso $\text{lím}_{n\to\infty} |x_n| = |\,\text{lím}_{n\to\infty} x_n|$.

(i) Muestre: $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = 0$ si y solo si $\text{lím}_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Problem 8. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2},$$

(c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n},$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-n^2+1} + 12n^6}}{\arctan(n^8 + \frac{1}{n}) + 2n^7 + |\cos(\mathrm{e}n)|},$$

(g) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

(h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + \cdots + n},$$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$, (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \arctan n}$.

Problem 9. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{\ln(n^2 + \pi)}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^7 + 2}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Problem 10. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} + 5^n}{15^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{e}^{5-3n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+2}$.

Problem 11. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n$.

Problem 12. Determine todos los números reales x para los cuales las series convergen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^x$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n$.

Problem 13. Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1-5x}$ centrada en $a = 0$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 3}$ centrada en $a = 0$,

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{9x - 6}$ centrada en $a = 1$,

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 3x + 3x^2 - 1}$ centrada en $a = 0$,

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4}$ centrada en $a = 2$.

Problem 14. (Copo de nieve)
Given a polygon, the middle third of each side of the polygon is removed and an equilateral triangle is attached instead.
If the initial polygon is an equilateral triangle, then the *snowflake curve* is the limit if the procedure described above is iterated inifintely often. Find the circumference and the area of the snowflake if each of the sides of the initial triangle has length $a > 0$. Prove your assertions.