Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2015-2

Tarea 4

- Fecha de entrega: 10 de noviembre de 2015.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la cual pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si usa algún teorema, explique claramente cual y porque es aplicable.

Problem 1. Halle el área encerrada por las curvas

$$r = 2, \quad r = 3\cos t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Problem 2. Considere las curvas $C_1 : r_1 = \sin(2t)$, $C_2 : r_2 = 1 + \sin(2t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Haz un dibujo de las curvas.

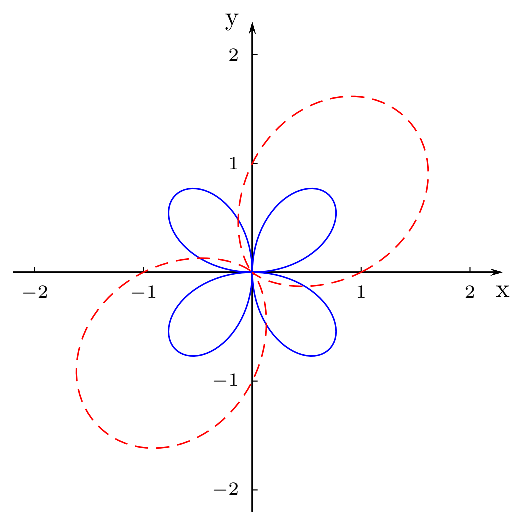
(b) Calcule la longitud de la curva C_1.

(c) Calcule el área encerrada por un lazo (loop) de la curva C_1.

(d) Calcule el área encerrada por un lazo (loop) de la curva C_2.

(e) Calcule todos los puntos de intersección de las dos curvas.

(f) Calcule el área del cuarto cuadrante que está encerrada por C_1 pero fuera de C_2.



Problem 3. Considere la curva C dada por

$$x(t) = t^2 + 1, \quad y(t) = t^2 + 4t - 3, \qquad t \in [-3, 3]\,.$$

(a) Determine si el punto $P(2, 5)$ pertenece a la curva.

(b) Plantea la ecuación de la tangente a la curva en el punto $Q(2, -6)$. Determine el ángulo entre el eje x positivo y la tangente en este punto.

(c) Encuentre todos los puntos en los cuales la curva tiene una tangente horizontal.

[1] Sec. 2: Jorge Ferro; Sec. 3: Andrés Galindo, 8-8:50
Sec. 4: Diana Castañeda; Sec. 5: Andrés Galindo, 9-9:50.

(d) Plantea la fórmula para el área entre el eje x y el pedazo de la curva entre los puntos $Q(2, -6)$ y el punto donde la curva tiene una tangente horizontal. (No es necesario evaluar la fórmula).

Problem 4. Dada la curva

$$C : x = 5 - t^4, \quad y = t^3 - t,$$

determine si la curva tiene autointersecciones. Encuentre todos los puntos, en los cuales la curva tiene tangentes verticales o horizontales. Haga un bosquejo de la curva.

Problem 5. Sea C la curva dada en coordenadas polares por $r = 4\sin(3\vartheta)$.

(a) Halle las rectas tangentes en $\vartheta = \pi/6$ y $\vartheta = \pi/4$.

(b) Haga un bosquejo y halle el área encerrada por la curva en el primer cuadrante.

Problem 6. Haga un bosquejo de la siguiente curve y halle su longitud:

$$C : x = 2\sin t, \ y = 2\cos t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Problem 7. Halle el área del limaçon, es decir el área encerrada por la curva

$$r = 2 + \cos\vartheta.$$

(a) Encuentre la longitud de la curva dada por

$$y = 5 - \frac{1}{3}\cosh 3x, \quad 0 \le x \le 2.$$

(b) Encuentre la longitud de la curva dada por

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}, \quad 1 \le y \le 2.$$

Problem 8. Encuentre el área de superficie que se obtiene al rotar la curva

$$y - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} = 0 \qquad \text{entre los puntos} \ \ (1, \tfrac{1}{2}) \text{ y } (8, 1)$$

(a) alrededor del eje x,

(b) alrededor del eje y.

Problem 9.

(a) Encuentre las coordenadas polares de los puntos $(-1, 1)$, $(-14, 14\sqrt{3})$.

(b) Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos dados por $r = 4$, $\varphi = \pi$ y $r = 3$, $\varphi = 7\pi/6$.

Problem 10. Sean las curvas C_1 y C_2 dadas en coordenadas polares por

$$C_1 : \ r = 2\sin\varphi, \quad C_2 : \ r = 3\cos\varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

(a) Haga un bosquejo de C_1 y C_2.

(b) Encuentre todos los puntos donde hay tangentes verticales o horizontales. Encuentre todos los puntos cuya tangente tiene un ángulo de 30 grados con el eje y.

(c) Encuentre el área encerrada por las dos curvas.

(d) Encuentre la longitud del arco que encierre el área del punto (c) .

Problem 11. La curva C sea dada por

$$x = \sin t, \quad y = \sin t \cos t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

(a) Muestre que C se intersecta en $(0, 0)$ y da la fórmula para la(s) tangente(s) a la curva en este punto.

(b) Da la fórmula para la tangente a C en el punto $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

(c) Calcule el área encerrada por C.