Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2015-2

Taller 3

- Fecha de entrega: 20 de octubre de 2015.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

Problem 1. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{4^n}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,(x+2)^n.$$

Problem 2. Determine todos los números reales x para los cuales las series convergen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^x, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\; x^n.$$

Problem 3. Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones. Calcule el radio de converencia y el intervalo de convergencia. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1-5x}$ centrada en $a = 0$,

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{7-3x}$ centrada en $a = 2$,

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{2x^2+3}$ centrada en $a = 0$,

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{9x-6}$ centrada en $a = 1$,

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 3x + 3x^2 - 1}$ centrada en $a = 0$,

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4}$ centrada en $a = 2$,

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x \arctan x$ centrada en $a = 0$,

[1] Sec. 32: Nicolás Walteros; Sec. 33: Alejandro Casallas;
Sec. 34: Jonathan Pérez; Sec. 35: César Del Corral.

(h) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\ln x \quad$ centrada en $a=4$.

Problem 4. Encuentre la serie de Taylor de las siguientes funciones. Calcule el radio de converencia y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\sin x \quad$ centrada en $a=\frac{\pi}{2}$,

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=(x-3)(x^2-6x+7) \quad$ centrada en $a=3$.

(c) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\sqrt{x+1} \quad$ centrada en $a=0$.

Problem 5. Muestre que

$$\Big|-\log(\cos x)-\frac{x^2}{2}\Big| \;\le\; \frac{2}{3}\,|x|^3 \quad \text{para} \quad x\in\Big[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\Big].$$

En particular, $\big|-\log(\cos x)-\frac{x^2}{2}\big| \;\le\; \frac{\pi^3}{96} \quad$ para $x\in\big[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\big]$.

Ayuda: Use la serie de Taylor de $f(x)=-\log(\cos x)$.

Problem 6. Muestre que $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+C.$

Problem 7. Estime $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ correcta a tres lugares decimales.

Problem 8. Calcule $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\pm\dots$.

Hint. Serie de potencias de arctan.

Problem 9. Encuentre $\arg(8)$, $\arg(-8)$, $\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$.

Problem 10. Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

(a) $\dfrac{5-3\mathrm{i}}{-4+3\mathrm{i}}$, (b) i^{-7}, (c) $e^{2\ln 2+\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$.

(d) $(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3$, (d) $\cos(1+\dfrac{\mathrm{i}\pi}{4})$.

Problem 11.

(a) Calcule $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{(\sin\mathrm{i})^2+(\cos\mathrm{i})^2}\right)^{17}$.

(b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación $z^5 = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

(c) Encuentre todos los números reales x, y que satisfacen la relación dada:

$$\text{(a)}\quad \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = -\pi, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}.$$

Problem 12. Encuentre la solución general de

(a) $\tan x \cos y = y' \tan y$,

(b) $yy' = \mathrm{e}^{x+2y} \sin x$,

(c) $xy' + y = y^2 x^2 \ln x, \qquad x > 0$,

(d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, *Ayuda. Use la substitución* $u = \frac{y}{x}$.

Problem 13. Encuentre la solución de $y\sqrt{1-x^2}\, y' = x,\ y(0) = -3$.

Problem 14. Un tanque contiene 200 gal de agua salada con 15 lb de sal disuelta. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 2 gal/min.

(a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.

(b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.

(c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 15 minutos.

(d) ¿Cual es la máxima cantidad de sal que puede llegar a tener el tanque?

(e) ¿Como cambia el resultado en (a) si el agua salade entra a razón de 4 gal/min en vez de 2 gal/min?

Problem 15. Encuentre la solución general de

(a) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

(b) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

(c) $3y'' - 12y' + 9y = 0$.

Problem 16. Encuentre la solución general de

(a) $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$,

(b) $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$,

(c) $y'' - 3y = 2e^{2x} \sin(x)$,

(d) $y'' + 4y = 3x \cos x$.

(e) $y'' + y = \cot^2 x$,

(f) $y'' - y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$,

Problem 17. Encuentre la solución general de

(a) $y'' + 2y' - 15y = \mathrm{e}^{2x}$,

(b) $y'' + 2y' - 15y = \mathrm{e}^{5x}$,

(c) $y'' + 2y' - 15y = \sin(5x)$,

(d) $y'' - 8y' + 16y = x^3 + x$,

(e) $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \cos x$.

Problem 18. Encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 10xe^{2x} \cos(x).$$

Problem 19. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{x}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Problem 20. Encuentre la solución del problema de valor en la fontera

$$y'' - y = 4x^2\mathrm{e}^{3x}, \qquad y(0) = y(1) = 0.$$