Recuerde: Si el quiz no está marcada con el número de su sección complementaria, el quiz no será calificado y su nota será 0.
Todos los aparatos electrónicos (celulares, calculadoras etc.) deben ser apagados y guardados. No se permite ninguna ayuda como apuntes, libros etc.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2015-2

Quiz 3, 20 de octubre 2015

1a	1b	2a	Σ
6	2	7	

NOMBRE: ________________________ CÓDIGO: __________ SECCIÓN COMPL.: _____

Las soluciones deben ser escritas con lapicero o tinta.

Problem 1. Considere las funciones

$$f(x) = \arctan(x), \qquad g(x) = x^5 \arctan(x), \qquad h(x) = \arctan(x^3).$$

(a) Determine las series de potencias centrada en 0 de las funciones f, g y h.

(b) Determine $f^{(2015)}(0)$ y $g^{(2015)}(0)$ (las derivadas 2015-ésima de f y g en 0).

(a) Observe que

$$\arctan x + C = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-(-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Para $x = 0$, obtenemos $\arctan 0 + C = 0$, lo que muestra que $C = 0$.

Alternativamente, sin usar una constante C:

$$\arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Se sigue que:

- $f(x) = \arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$ (4 ptos)
- $g(x) = x^5 \arctan x = x^5 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+6},$ (1 pto)
- $h(x) = \arctan x^3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (x^3)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{6n+3}.$ (1 pto)

(b) Observe que, usando la fórmula general para la serie de Taylor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Por la unicidad de la representación en series de potencias, los coeficientes que multiplican x^m deben ser iguales en las dos series. Como buscamos $f^{(2015)}(0)$, debemos encontrar el coeficiente que acompaña x^{2015}. Para ello, necesitamos n tal que $2n+1 = 2015$, es decir, $n = \frac{2015-1}{2} = 1007$. Si comparamos los coeficienctes de x^{2015} de las dos series, obtenemos

$$\frac{(-1)^{1007}}{2015} = \frac{f^{(2015)}(0)}{2015!},$$

y por tanto

$$f^{(2015)}(0) = \frac{(-1)^{1007} 2015!}{2015} = -2014!.$$

Analogamente tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+6} = g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Dado que en la serie al lado izquierdo no hay potencias impares de x, todos los coeficientes al lado derecho frente potencias impares de x deben ser cero también. Por tanto, $g^{(2015)}(0) = 0$. (Es claro, porque g es una función impar.)

Problem 2. Determine la solución de

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x + \mathrm{e}, \qquad y(\mathrm{e}) = 5\mathrm{e}^2.$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Usaremos el método del factor integrante para hallar la solución. Primero reescribimos la ecuacón en la forma estandar $y' + P(x)y = Q(x)$:

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x + \mathrm{e}. \tag{$*$}$$

El factor integrante es

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Si multiplicamos ambos lados de $(*)$ con $I(x)$, obtenemos

$$\frac{1}{x} y'(x) - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{x+\mathrm{e}}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{x} y(x)\right)' = \frac{x+\mathrm{e}}{x} = 1 + \frac{\mathrm{e}}{x}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{x} y(x) = \int 1 + \frac{\mathrm{e}}{x}\,\mathrm{d}x = x + \mathrm{e}\ln|x| + C.$$

Entonces la solucón general de la ecuación diferencial dada es

$$\boxed{y(x) = x^2 + \mathrm{e}x\ln|x| + Cx.}$$

Ahora usamos la condición inicial para determinar C:

$$5\mathrm{e}^2 = y(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 \ln|\mathrm{e}| + C\mathrm{e} = 2\mathrm{e}^2 + C\mathrm{e} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{C = 3\mathrm{e}^2.}$$

Así que la respuesta es

$$y(x) = x^2 + \mathrm{e}x\ln|x| + 3\mathrm{e}^2 x.$$

Puntaje: 5 puntos para encontrar la solución general, 2 puntos para encontrar C.