Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2015-1

Taller 3

- Fecha de entrega: 6 de abril de 2015.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

Problem 1. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\arctan n}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-n^2+1}+12n^6}}{\arctan(n^8+\frac{1}{n})+2n^7+|\cos(\mathrm{e}n)|}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$,

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$, (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\arctan n}$.

Problem 2. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{\ln(n^2+\pi)}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^7+2}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

[1] Sec. 2: Jorge Ferro; Sec. 3: Andrés Galindo, 8-8:50
Sec. 4: Diana Castañeda; Sec. 5: Andrés Galindo, 9-9:50.

Problem 3. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}+5^n}{15^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \mathrm{e}^{5-3n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+2}$.

Problem 4. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n$.

Problem 5. Determine todos los números reales x para los cuales las series convergen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^x$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\; x^n$.

Problem 6. Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones. Calcule el radio de converencia y el intervalo de convergencia. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

(a) $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-5x}$ centrada en $a=0$,

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x}{2x^2+3}$ centrada en $a=0$,

(c) $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{9x-6}$ centrada en $a=1$,

(d) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{x}{x^3-3x+3x^2-1}$ centrada en $a=0$,

(e) $f:\mathbb{R}\setminus\{6\}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\dfrac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4}$ centrada en $a=2$,

(f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=x\arctan x$ centrada en $a=0$,

(g) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\ln x$ centrada en $a=4$.

Problem 7. Encuentre la serie de Taylor de las siguientes funciones. Calcule el radio de converencia y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Las series halladas coinciden con las funciones?

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\sin x$ centrada en $a=\frac{\pi}{2}$,

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=(x-3)(x^2-6x+7)$ centrada en $a=3$.

(c) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\sqrt{x+1}$ centrada en $a=0$.

Problem 8. Muestre que

$$\Big| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2}\Big| \;\le\; \frac{2}{3}\,|x|^3 \quad \text{para} \;\; x \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big].$$

En particular, $\big| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2}\big| \;\le\; \frac{\pi^3}{96} \quad \text{para } x \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$.

Ayuda: Use la serie de Taylor de $f(x) = -\log(\cos x)$.

Problem 9. Muestre que $\displaystyle\int e^{x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C$.

Problem 10. Estime $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ correcta a tres lugares decimales.

Problem 11. Calcule $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \dots$.

Hint. Serie de potencias de arctan.

Problem 12. Encuentre $\arg(8)$, $\arg(-8)$, $\arg(-\sqrt{3} - i)$.

Problem 13. Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

(a) $\dfrac{5-3i}{-4+3i}$, (b) i^{-7}, (c) $e^{2\ln 2 + i\frac{7\pi}{6}}$.

(d) $(-\sqrt{3} - i)^3$, (d) $\cos(1 + \dfrac{i\pi}{4})$.

Problem 14.

(a) Calcule $\displaystyle\left(\frac{1+i}{(\sin i)^2 + (\cos i)^2}\right)^{17}$.

(b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación $z^5 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

(c) Encuentre todos los números reales x, y que satisfacen la relación dada:

(a) $e^{x+iy} = -\pi$, (b) $\dfrac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$.