

**Taller 2**

- Fecha de entrega: 26 de febrero de 2015.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria<sup>1</sup> a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si el taller no está entregado en un forma ordenado y bien escrito, no será calificado.

**Problem 1.** Determine si las siguientes integrales son impropias. Si lo son, explique por qué lo son. Determine si las integrales convergen o divergen.

(a)  $\int_{-5}^5 \frac{1}{x} dx,$

(b)  $\int_{-5}^5 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx,$

(c)  $\int_0^3 \ln x dx,$

(d)  $\int_0^\infty \sin x dx.$

(e)  $\int_0^\infty \frac{(\arctan e^x)^3 + (\sin \frac{1}{x})^2}{x\sqrt{x} + \arctan(x^2 + 1)} dx,$

(f)  $\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx,$

(g)  $\int_1^\infty \frac{\sinh x - x^2}{x^5 + |\sin(x^2 + 1)|} dx,$

(h)  $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2+x+1}{x+5}} dx.$

**Problem 2.** Determine si las siguientes integrales son impropias. Si lo son, explique por qué lo son. Determine si las integrales convergen o divergen.

(a)  $\int_3^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx,$

(b)  $\int_0^2 \frac{\arctan x}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$

---

<sup>1</sup>Sec. 2: Jorge Ferro; Sec. 3: Andrés Galindo, 8-8:50

Sec. 4: Diana Castañeda; Sec. 5: Andrés Galindo, 9-9:50.

**Problem 3.** Halle el límite de la sucesión  $(\frac{3}{2+\ln n} - 3)_{n \in \mathbb{N}}$  usando  $\epsilon$  y  $N$ .

**Problem 4.** Halle el límite de la sucesión  $(2 + e^{\frac{3n}{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$  usando  $\epsilon$  y  $N$ .

**Problem 5.** ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

- (a)  $\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^3\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (b)  $\left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (c)  $\left(\frac{(-1)^n n^7 + 8n^{15}}{n^{15} \arctan n + (\cos n)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
(d)  $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (e)  $\left(\frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (f)  $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
(g)  $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ , (h)  $\left(\frac{5^n}{3^n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (i)  $\left(\frac{x^{51n}}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Problem 6.** ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

- (a)  $\left(\frac{\sec \frac{1}{n} + 3e^{2n} + 8n^{15}}{n^{15} + e^n \sqrt{1 + e^{2n}}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (b)  $\left(\frac{\cos(n!)}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (c)  $\left(2^n \sqrt{(2n)!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  
(d)  $\left(n^2(1 - \cos(\frac{1}{n}))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , (e)  $(\log(\log n))_{n=3}^{\infty}$ , (f)  $(\sqrt[n]{x})_{n \in \mathbb{N}}$  ( $x \geq 0$ ).

**Problem 7.** La sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sea dada por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

*Hint.* Se puede mostrar que la sucesión es acotada por 350.

**Problem 8.** La sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sea dada por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

**Problem 9.** Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesiones de números reales. Pruebe o halle un contraejemplo

- (a) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, entonces es acotada.  
(b) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada, entonces diverge.  
(c) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no es acotada por arriba, entonces diverge a  $\infty$ .  
(d) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty$ .  
(e) Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

- (f) Si  $(y_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0, entonces por lo menos una de las sucesiones  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 0.
- (g)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si y solo si las sucesiones  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergen y tienen el mismo límite.
- (h) Muestre:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existe  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$  existe y en este caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|$ .
- (i) Muestre:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  si y solo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .

**Problem 10.** Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ ,
- (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ , (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ ,
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctan n}$ , (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{e^{-n^2+1} + 12n^6}}{\arctan(n^8 + \frac{1}{n}) + 2n^7 + |\cos(en)|}$ ,
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ , (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2 + \dots + n}$ ,
- (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ , (j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \arctan n}$ .

**Problem 11.** Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{\ln(n^2 + \pi)}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ ,
- (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ , (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ ,
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^7 + 2}$ , (f)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ .

**Problem 12.** Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} + 5^n}{15^n}$ , (b)  $\sum_{n=3}^{\infty} e^{5-3n}$ , (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ , (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+2}$ .

**Problem 13.** Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

**Problem 14.** Determine todos los números reales  $x$  para los cuales las series convergen:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right)^x, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n.$$

**Problem 15.** Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones:

$$(a) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-5x} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(b) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2x^2+3} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(c) f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{9x-6} \quad \text{centrada en } a = 1,$$

$$(d) f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x^3-3x+3x^2-1} \quad \text{centrada en } a = 0,$$

$$(e) f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4} \quad \text{centrada en } a = 2.$$

**Problem 16. (Copo de nieve)**

Given a polygon, the middle third of each side of the polygon is removed and an equilateral triangle is attached instead.

If the initial polygon is an equilateral triangle, then the *snowflake curve* is the limit if the procedure described above is iterated infinitely often. Find the circumference and the area of the snowflake if each of the sides of the initial triangle has length  $a > 0$ . Prove your assertions.

