

Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2014-2

Tarea 4

- Fecha de entrega: 13 de noviembre de 2014.
- Indique claramente en la primera página cuales ejercicios entrega usando una tabla como ésta:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

que contiene exactamente los puntos que entrega.

- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria¹ a la cual pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si usa algún teorema, explique claramente cual y porque es aplicable.

Problem 1. Encuentre $\arg(8)$, $\arg(-8)$, $\arg(-\sqrt{3} - i)$.

Problem 2. Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

- (a) $\frac{5 - 3i}{-4 + 3i}$, (b) i^{-7} , (c) $e^{2 \ln 2 + i \frac{7\pi}{6}}$.
 (d) $(-\sqrt{3} - i)^3$, (d) $\cos(1 + \frac{i\pi}{4})$.

Problem 3.

(a) Calcule $\left(\frac{1 + i}{(\sin i)^2 + (\cos i)^2} \right)^{17}$.

(b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación $z^5 = -2 - 2i\sqrt{3}$.

(c) Encuentre todos los números reales x, y que satisfacen la relación dada:

(a) $e^{x+iy} = -\pi$, (b) $\frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$.

Problem 4. Encuentre la serie de Taylor de

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ centrada en $a = \frac{\pi}{2}$,

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)(x^2 - 6x + 7)$ centrada en $a = 3$,

(c) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^3}$ centrada en $a = 0$,

(d) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^3}$ centrada en $a = 0$,

¹Sec. 32: Carlos Puerto; Sec. 33: David Perdomo, 12-13:00
 Sec. 34: Miguel De Avila; Sec. 35: David Perdomo, 12-13:00.

- (e) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x + 3)$ centrada en $a = 1$,
 (f) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) \sin(x)$ centrada en $a = 0$,
 (g) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}$ centrada en $a = 5$,
 (h) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 1}$ centrada en $a = 0$.

Problem 5. Muestre que

$$\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3} |x|^3 \quad \text{para } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

En particular, $\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{\pi^3}{96}$ para $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Ayuda: Use la serie de Taylor de $f(x) = -\log(\cos x)$.

Problem 6. Encuentre la solución general de

- (a) $\tan x \cos y = y' \tan y$,
 (b) $yy' = e^{x+2y} \sin x$,
 (c) $xy' + y = y^2 x^2 \ln x$, $x > 0$,
 (d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$, *Ayuda.* Use la substitución $u = \frac{y}{x}$.

Problem 7. Encuentre la solución de $y\sqrt{1-x^2}y' = x$, $y(0) = -3$.

Problem 8. Un tanque contiene 200 gal de agua salada con 15 lb de sal disuelta. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 2 gal/min.

- (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.
 (b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.
 (c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 15 minutos.
 (d) ¿Cual es la máxima cantidad de sal que puede llegar a tener el tanque?
 (e) ¿Como cambia el resultado en (a) si el agua salada entra a razón de 4 gal/min en vez de 2 gal/min?

Problem 9. Para $z, w \in \mathbb{C}$, $x := \operatorname{Re}(z)$, $y := \operatorname{Im}(z)$ demuestre las siguientes propiedades:

- (a) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$,
 (b) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$,
 (c) $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$,
 (d) $\cos(iz) = \cosh(z)$, $\sin(iz) = i \sinh(z)$,
 (e) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

Problem 10. Encuentre la solución general de

(a) $y'' + y = \cot^2 x$,

(b) $y'' - y = \frac{1}{1 + e^x}$,

(c) $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$,

(d) $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$,

(e) $y'' - 3y = 2e^{2x} \sin(x)$,

(f) $y'' + 4y = 3x \cos x$.

Problem 11. Encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 10xe^{2x} \cos(x).$$

Problem 12. Encuentre la solución general de

(a) $y'' + 6y' + 13y = 0$,

(b) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

(c) $3y'' - 12y' + 9y = 0$.

Problem 13. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Problem 14. Encuentre la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' - y = 4x^2 e^{3x}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$