

## Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2013-2

## Tarea 4

- Fecha de entrega: 5 de mayo de 2014.
- Indique claramente en la primera página cuales ejercicios entrega usando una tabla como ésta:

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

que contiene exactamente los puntos que entrega.

- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria<sup>1</sup> a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- Si usa algún teorema, explique claramente cual y porque es aplicable.

**Problem 1.** Encuentre  $\arg(8)$ ,  $\arg(-8)$ ,  $\arg(-\sqrt{3} - i)$ .

**Problem 2.** Encuentre la parte real y la parte imaginaria de

$$(a) \frac{5 - 3i}{-4 + 3i}, \quad (b) i^{-7}, \quad (c) e^{2 \ln 2 + i \frac{7\pi}{6}}.$$

$$(d) (-\sqrt{3} - i)^3, \quad (d) \cos\left(1 + \frac{i\pi}{4}\right).$$

**Problem 3.**

(a) Calcule  $\left(\frac{1+i}{(\sin i)^2 + (\cos i)^2}\right)^{17}$ .

(b) Encuentre todas las soluciones (complejas) de la ecuación  $z^5 = -2 - 2i\sqrt{3}$ .

(c) Encuentre todos los números reales  $x, y$  que satisfacen la relación dada:

$$(a) e^{x+iy} = -\pi, \quad (b) \frac{1+i}{1-i} = xe^{iy}.$$

**Problem 4.** Encuentre la serie de Taylor de

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  centrada en  $a = \frac{\pi}{2}$ .

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-3)(x^2 - 6x + 7)$  centrada en  $a = 3$ .

(c)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+1}$  centrada en  $a = 0$ ,

(d)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$  centrada en  $a = 5$ .

<sup>1</sup>Sec. 2: Duván Cardona, 8-8:50 am; Sec. 3: Jordi Bulbena,  
Sec. 4: Duván Cardona, 9-9:50 am; Sec. 5: César del Corral.

**Problem 5.** Muestre que

$$\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3 \quad \text{para } x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

En particular,  $\left| -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{\pi^3}{96}$  para  $x \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ .

*Ayuda:* Use la serie de Taylor de  $f(x) = -\log(\cos x)$ .

**Problem 6.** Encuentre la solución general de

(a)  $\tan x \cos y = y' \tan y,$

(b)  $yy' = e^{x+2y} \sin x,$

(c)  $xy' + y = y^2 x^2 \ln x, \quad x > 0,$

(d)  $y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad \text{Ayuda. Use la substitución } u = \frac{y}{x}.$

**Problem 7.** Encuentre la solución de  $y\sqrt{1-x^2}y' = x, y(0) = -3.$

**Problem 8.** Un tanque contiene 200 gal de agua salada con 15 lb de sal disuelta. Agua salada con 3 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 2 gal/min.

- (a) Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t \geq 0.$
- (b) Determine la cantidad de sal que hay en el tanque después de 5 minutos.
- (c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 15 minutos.
- (d) ¿Cual es la máxima cantidad de sal que puede llegar a tener el tanque?
- (e) ¿Como cambia el resultado en (a) si el agua salada entra a razón de 4 gal/min en vez de 2 gal/min?

**Problem 9.** Para  $z, w \in \mathbb{C}, x := \operatorname{Re}(z), y := \operatorname{Im}(z)$  demuestre las siguientes propiedades:

(a)  $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w),$

(b)  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w),$

(c)  $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1,$

(d)  $\cos(iz) = \cosh(z), \quad \sin(iz) = i \sinh(z),$

(e)  $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$

**Problem 10.** Encuentre la solución general de

(a)  $y'' + y = \cot^2 x$ ,

(b)  $y'' - y = \frac{1}{1 + e^x}$ ,

(c)  $y'' + y' - 2y = e^x + e^{2x}$ ,

(d)  $y'' + y' - 6y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ ,

(e)  $y'' - 3y = 2e^{2x} \sin(x)$ ,

(f)  $y'' + 4y = 3x \cos x$ .

**Problem 11.** Encuentre la solución general de

$$y'' - y' - 2y = 10xe^{2x} \cos(x).$$

**Problem 12.** Encuentre la solución general de

(a)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ,

(b)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ ,

(c)  $3y'' - 12y' + 9y = 0$ .

**Problem 13.** Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 5y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

**Problem 14.** Encuentre la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' - y = 4x^2 e^{3x}, \quad y(0) = y(1) = 0.$$