Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2012-2

Taller 3

- Fecha de entrega: 19 de octubre 2012.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si su nombre o el número de la sección no está claramente indicado, el taller no será calificada.**

Problem 1. ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

(a) $\left(\dfrac{5^n}{3^n n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (b) $\left(\left(1+\dfrac{7}{n}\right)^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (c) $\left(\dfrac{\sec\frac{1}{n}+3\mathrm{e}^{2n}+8n^{15}}{n^{15}+\mathrm{e}^n\sqrt{1+\mathrm{e}^{2n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(d) $\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (e) $\left(\dfrac{\cos(n!)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (f) $(\sqrt{n}-\sqrt{n^2+1})_{n\in\mathbb{N}}$,

(g) $\left(\sqrt[2n]{(2n!)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (h) $\left((1+\frac{1}{3n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (i) $(\log(\log n))_{n=3}^{\infty}$,

(j) $\left(\sqrt[n]{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x\geq 0)$, (k) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (l) $\left(n^2(1-\cos(\frac{1}{n}))\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

Problem 2. Halle el límite de la sucesión $\left(2+\mathrm{e}^{\frac{3n}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ usando ϵ y N.

Problem 3. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1+a_n}{2+a_n} \quad \text{para } n\geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

Problem 4. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln n)}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\arctan n}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+\sqrt{\ln n+14n^7}-\tan\frac{1}{n}}{\arctan(\sqrt{n+1})+2n^7+|\cos(\mathrm{e}n)|}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$,

Problem 5. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{1+n}+\pi^n}{7^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\mathrm{e}^{-3n/2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+5n+4}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n-1}$.

[1] Sec. 25: J. R. Romero, 11-11:50; Sec. 26: V. Bermúdez, 11-11:50; Sec. 27: V. Bermúdez, 12-12:50; Sec. 28: D. Perdomo, 12-12:50.

Los siguientes problemas son opcionales, y no afectarán la nota de este taller. En caso de entregarlos serán corregidos como retroalimentación.

Problem 6. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiónes de números reales. Pruebe o halle un contraejemplo

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es acotada.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces diverge.

(c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada por arriba, entonces diverge a ∞.

(d) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞, entonces $\lim_{n\to\infty}\big(x_n+y_n\big)=\infty$.

(e) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(f) Si $(y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces por lo menos una de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

(g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si las sucesiones $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y tienen el mismo límite.

Problem 7. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

Problem 8. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n, \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n},$$

$$\text{(d)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}, \qquad \text{(e)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^7+2}, \qquad \text{(f)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \arctan n},$$

$$\text{(g)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{\ln(n^2+\pi)}, \qquad \text{(h)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \qquad \text{(j)} \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Problem 9. Halla el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{4^n}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n.$$

Problem 10. Determine todos los números reales x para los cuales las series convergen:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^x, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(x-2)^{3n}}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n.$$

Problem 11. Encuentre la representación como serie de potencias de las siguientes funciones:

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{1-5x}$ centrada en $a = 0$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{2x^2+3}$ centrada en $a = 0$,

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{9x-6}$ centrada en $a = 1$,

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 3x + 3x^2 - 1}$ centrada en $a = 0$,

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{6\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{(x-2)^{15}}{(x-6)^4}$ centrada en $a = 2$.

Problem 12. Encuentre la serie de Taylor de

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x+1}$ centrada en $a = 0$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin x$ centrada en $a = \frac{\pi}{2}$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x-3)(x^2 - 6x + 7)$ centrada en $a = 3$.

Problem 13. Muestre que $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + C.$

Problem 14. Estime $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ correcta a tres lugares decimales.

Problem 15. Calcule $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \pm \dots$.
Hint. Serie de potencias de arctan.

Problem 16. (Copo de nieve)
Given a polygon, the middle third of each side of the polygon is removed and an equilateral triangle is attached instead.
If the initial polygon is an equilateral triangle, then the *snowflake curve* is the limit if the procedure described above is iterated inifintely often. Find the circumference and the area of the snowflake if each of the sides of the initial triangle has length $a > 0$. Prove your assertions.