Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2012-1

Taller 2

- Fecha de entrega: 14 de marzo 2012 en la magistral.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si su nombre o el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**

Problem 1. Encuentre las soluciónes generales de

(a) $y' \sin(2y) = x(\mathrm{e}^{x^2} + 1)$,
(b) $t^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{t^3}} y' - 3t^{-2} \mathrm{e}^{\frac{1}{t^3}} y = t^{-1} + t^{-2} \mathrm{e}^{\frac{1}{t^3}}$,
(c) $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{4z}{x} = x^4$,
(d) $y'' + \frac{3}{t} y' = 0$,
(e) $y' = (x-2)y^3 + \frac{2x^3}{x^4 - 16} y$,
(f) $xy' + 1 = \cos(x)\mathrm{e}^{-y}$. *Hint.* Use la substitución $u(x) = \mathrm{e}^{y(x)}$.

Problem 2. Encuentre la solución y del problema de valor inicial

(a) $3y^2 y' = xy^3 - x + y^3 - 1, \qquad y(0) = 2.$
(b) $y' = \frac{6x}{y + x^2 y}, \qquad y(0) = -3,$

Problem 3. Encuentre la solución y de la ecuación diferencial

$$-\cos^2(y) + (x^2 + 4)y' = 0,$$

con $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.

Problem 4. Haga un bosquejo del campo direccional de

$$y' = (y+2)(x+1) \tag{$*$}$$

y use el método de Euler con *step size* 0,1 para aproximar $z(1{,}5)$ donde z es solución de ($*$) con $z(2) = -1$.

Problem 5. Un lago tiene G galones de agua fresca inicialmente. Sin embargo un flujo de agua, que tiene un químico peligroso, comienza a entrar al lago a una rata de r galones/día mientras que la mezcla del lago se desborda por otro lado a la misma rata. La concentración del químico en el flujo entrante es $\gamma(t) = \big(2 + \sin(t/2)\big)$ gramos/galón. Determinar la concentración del químico $Q(t)$ en el lago para cualquier tiempo t.

[1] Sec. 12: J. Cruz, 5-5:50; Sec. 13: V. Bermúdez, 5-5:50;
Sec. 14: V. Bermúdez, 11-11:50; Sec. 15: E. Torres, 11-11:50.

Los siguientes problemas son opcionales, y no afectarán la nota de este taller. En caso de entregarlos será corregido como retroalimentación.

Problem 6. Dada la curva

$$C : x = 5 - t^4, \quad y = t^3 - t,$$

determine si la curva tiene autointersecciones. Encuentre todos los puntos, en los cuales la curva tiene tangentes verticales o horizontales. Haga un bosquejo de la curva.

Problem 7. Sea C la curva dada en coordenadas polares por $r = 4\sin(3\theta)$.

(a) Halle las rectas tangentes en $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/4$.

(b) Haga un bosquejo y halle el área encerrada por la curva en el primer cuadrante.

Problem 8. Haga un bosquejo de la siguiente curve y halle su longitud:

$$C : x = 2\sin t,\ y = 2\cos t, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Problem 9. Halle el área del limaçon, es decir el área encerrada por la curva

$$r = 2 + \cos\theta.$$