Tarea 3

- Fecha de entrega: 21 de Octubre, 2011.
- Indique claramente en su hoja tanto su nombre como la sección de la clase complementaria[1] a la que pertenece. **Si el número de la sección no está claramente indicado, la tarea no será calificada.**
- **Si usa algún teorema, explique claramente cual y porque es aplicable.**

Problem 1. ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

(a) $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$, (b) $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$, (c) $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(d) $\left(\frac{n!}{7^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (e) $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (f) $\left(\sqrt{n^3-1}-\sqrt{n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(g) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (h) $\left(n(1-\cos\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (i) $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problem 2. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \text{para } n \geq 0.$$

(a) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada por 2.

(b) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y halle el límite.

Problem 3. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{1}{n})$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{5^n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n^2}$, (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{1/n}-1)$.

[1] Sec. 32: J. Ortíz, 2-2:50; Sec. 33: J. Borja, 2-2:50;
Sec. 34: J. Ortíz, 3-3:50; Sec. 35: J. Borja, 3-3:50.

Problem 4. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n - 7^n}{8^{n-1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3\pi^n}{e^{2n}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \ln \frac{n}{n+2}$.

Los siguientes problemas son opcionales, y no afectarán la nota de este taller. En caso de entregarlos será corregido como retroalimentación.

Problem 5. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiónes de números reales. Pruebe o halle un contraejemplo

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es acotada.
(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces diverge.
(c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada por arriba, entonces diverge a ∞.
(d) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞, entonces $\lim_{n\to\infty}\big(x_n+y_n\big) = \infty$.
(e) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si las sucesiones $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y tienen el mismo límite.

Problem 6. Sea $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ayuda.
- Muestre que $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$.
- Sea $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n$. Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y positiva.

Problem 7. ¿Para cuales $x \in \mathbb{R}$ convergen las siguientes series, para cuales divergen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 8^n x^{3n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (3x-2)^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-2n}$.

Problem 8. Halle la serie de potencias que representa las siguientes funciones, y determine donde la serie de potencias converge:

(a) $\displaystyle\frac{1}{1+2x}$, centrada en 0, (b) $\displaystyle\frac{1}{1+2x}$, centrada en 5,

(c) $x^5 \ln(1+x)$, centrada en 0, (d) $\displaystyle\frac{x}{x+2}$, centrada en -1.