Cálculo integral – Ecuaciones diferenciales 2011-2

Tarea 3

Soluciones del taller 3 – sin garantía que sean correctas. Si encuentran errores, soluciones alternativas, soluciones mejores, déjenme saber.

Use at your own risk!

Los siguientes teormas serán utiles:

Teorema 1 (Sandwich lemma). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ con $a_n \le b_n \le c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen y tienen el mismo límite, entconces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge y*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Corolario 2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \iff \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Teorema 3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\mathbb{R}$. Si la sucesción es acotada, converge. Si no es acotada, diverge a ∞. Una afirmación análoga se tiene para sucesiones decrecientes.*

Teorema 4 ("Divergence test"). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que no converge a 0. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Teorema 5 (Integral test). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que f es continua, decreciente $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [1,\infty)$ y $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \qquad \iff \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Corolario 6 (Integral test). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $f : [N,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que f es continua, decreciente $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [N,\infty)$ y $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge N$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \qquad \iff \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Teorema 7 (Test de comparación). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ con $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{diverge} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{diverge.}$$

Teorema 8 (Test de comparación). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ con $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0,\infty)$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \qquad \iff \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{converge.}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Teorema 9. *Una serie que converge absolutamente, converge.*

Teorema 10 (Test de la raíz)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y suponga que $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe o es ∞. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge if } & L < 1, \\ \text{diverge if } & L > 1. \end{cases}$$

Teorema 11 (Test del cociente)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y suponga que $L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe o es ∞. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge if } & L < 1, \\ \text{diverge if } & L > 1. \end{cases}$$

Teorema 12 (Leibniz)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente en $\mathbb{R}$ que converge a 0 (consecuentemente $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.*

Problem 1. ¿Convergen las sucesiones siguientes? Si convergen, halle el límite.

(a) $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Sea $x_n := n^3$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es obviamente creciente. No es acotada por arriba porque para cada $R > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ con $N \geq R$. Entonces para todo $n \geq N$ se tiene que $x_n \geq x_N = N^3 4 \geq N \geq R$. Por teorema 3, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞

(b) $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Sea $x_n := (-1)^n$. Supongamos que la sucesión converge a un número real x_0. Entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$ se tiene que $|x_n - x_0| < \frac{1}{2}$. En particular $|x_N - x_0| < \frac{1}{2}$ y $|x_{N+1} - x_0| < \frac{1}{2}$. Entonces por un lado, utilizando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |x_{N+1} - x_N| &= |x_{N+1} - x_0 - (x_N - x_0)| \leq |x_{N+1} - x_0| + |x_N - x_0| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} |x_{N+1} - x_N| &= |(-1)^{N+1}(N+1) - (-1)^N N| = |(-1)^{N+1}\big(N+1+N\big)| \\ &= 2N + 1 \geq 1, \end{aligned}$$

así que llegamos a la contradicción $|x_{N+1} - x_N| < 1$ y $|x_{N+1} - x_N| \geq 1$.

(c) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución 1: Sean $x_n := \frac{(-1)^n}{n^2+1}$, $a_n := \frac{1}{n^2+1}$ y $b_n := -\frac{1}{n^2+1}$. Obviamente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0, hence por el lema del sandwich, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución 2: Obviamente $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Por el teorema 2 obtenemos $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(Que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se sigue por ejemplo por el lema del sandwich, usando $0 \le a_n \le \frac{1}{n}$ y el hecho de que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$).

Solución 3: Por el teorema de Leibniz (teorema 12), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge (prueba!), entonces por teorema 4 la sucesion $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

(d) $\left(\dfrac{n!}{7^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{7^n} = \infty$.

Solución 1: Sea $x_n := \frac{n!}{7^n}$ y $R \in \mathbb{R}$. Tenemos que mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n : R$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$. Escoge $N \in \mathbb{N}$ con $N \ge \frac{7^7 R}{6!}$. Entonces, para todo $n \ge N$ en particular tenemos $n \ge 7$, y así

$$\begin{aligned} x_n = \frac{n!}{7^n} &= \frac{n}{7} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{7}}_{\le 1} \cdot \ldots \underbrace{\frac{8}{7}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{7}{7}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7}}_{=\frac{6!}{7^6}} \\ &\ge \frac{n}{7} \cdot \frac{6!}{7^6} \ge \frac{N}{7} \cdot \frac{6!}{7^6} \ge \frac{7^7 R}{6!} \cdot \frac{6!}{7^6} = R. \end{aligned}$$

Solución 2: Como antes, podemos mostrar que para todo $n \ge 7$ obtenemos que

$$x_n \ge \frac{n}{7} \cdot \frac{6!}{7^6} = n \cdot \frac{6!}{7^7}$$

Como $(n \cdot \frac{6!}{7^7})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo hace.

(e) $\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Solución 1: Observe que

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} = \frac{n!}{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)} = \underbrace{\frac{n}{2n}}_{\le 1} \underbrace{\frac{n-1}{2n-1}}_{\le 1} \cdots \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\le 1} \frac{1}{n+1} \\ &\le \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, el lema del sandwich implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Solución 2: En Problema 3 **(c)** se muestra que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge. Entonces, por teorema 4 se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(f) $\left(\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Solución 1: Para $n \ge 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \ge x_n = \sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3+1} &= \frac{(\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3-1} - \sqrt{n^3+1})}{\sqrt{n^3-1} + \sqrt{n^3+1}} \\ &= \frac{n^3 - 1 - (n^3+1)}{\sqrt{n^3-1} + \sqrt{n^3+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^3-1} + \sqrt{n^3+1}} \\ &= \frac{-2}{n^{3/2}(\sqrt{1-n^{-3}} + \sqrt{1+n^{-3}})} \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to \infty. \end{aligned}$$

Ahora el lema del sandwich implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(g) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.

Sea $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{1/x}$. Basta mostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^{1/x}=\lim_{x\to\infty}(\mathrm{e}^{\ln x})^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{1/x\ln x}. \tag{1}$$

Usando el teorema de l'Hospital en $(*)$ obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Entonces, con (1) y la continuidad de la función exponencial, obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}1/x\ln x}=\mathrm{e}^0=1.$$

(h) $\left(n(1-\cos\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Definimos la función $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x):=x(1-\cos\frac{1}{x})$. Basta mostrar que $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Esto sigue por el teorma de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=-\sin 0=0.$$

(i) $\left(\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\frac{1}{3}$.

Prueba:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(1+(-\frac{2}{3})^n)}{3^{n+1}(1+\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{3(1+\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})^n)}=\frac{1}{3},$$

donde utilizamos que $\lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{3})^n=0$ (porque $|-\frac{2}{3}|<1$).

Problem 2. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea dada por

$$a_0=0,\quad a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}\quad \text{para } n\ge 0.$$

(a) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada por 2.

(b) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y halle el límite.

Prueba.

(a) Por inducción vamos a probar que para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $a_n\le 2$ y $a_n\le a_{n+1}$.

Caso base: $n=0$. Obviamente $a_0=1\le 2$ y $a_0=1\le\sqrt{2}=a_1$.

Paso inductivo: $n\to n+1$. Suponemos que $a_n\le 2$ y que $a_n\le a_{n+1}$.
A mostrar: $a_{n+1}\le 2$ y que $a_{n+1}\le a_{n+2}$.
Esto se tiene porque $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}\le\sqrt{1+2}=\sqrt{3}\le 2$ y

$$a_{n+2}=\sqrt{1+a_{n+1}}\ge\sqrt{1+a_n}=a_{n+1}.$$

(b) Por (a) sabemos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotado por arriba, entonces, por un teorema visto en clase, la sucesión converge. Sea $A := \lim_{n\to\infty} a_n$. Para determinar A, usamos la definición de los a_n:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_n} \\ \Longrightarrow \quad & A = \sqrt{1+A} \\ \Longrightarrow \quad & A^2 = 1 + A \\ \Longrightarrow \quad & 0 = A^2 - A - 1 \\ \Longrightarrow \quad & A = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Como $a_n \geq 1$ para todo n, también $A \geq 1$, así que $A = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ no es posible. Se sigue que $A = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

(*Remark.* Este número se llama el *número áureo.*)

Problem 3. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente.

En lo que sigue, observe:

- Una serie absolutamente convergente converge.
- Si todos los términos de una serie son positivos y la serie converge, converge absolutamente.

que convergencia absoluta implica convergencia, y que una serie, cuyos términos son positivos, conver

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{n^2+1}{n^4+2} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1: Sabemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ converge (por el integral test teorema 5). Entonces la serie arriba también converge por el test de comparación (teorema 7) porque

$$0 \leq \frac{n^2+1}{n^4+2} \leq \frac{n^2+n^2}{n^4+2} \leq \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}.$$

Solución 2: $0 \leq \frac{n^2}{n^4+2} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ y $0 \leq \frac{1}{n^4+2} \leq \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^4}$ y las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ convergen por el integral test. Entonces, por el test de comparación (teorema 7), las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+2}$ también convergen. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$$

converge.

Solución 3: con el test de comparación de teorema 8. Observe que $\frac{n^2}{n^4+2} \geq 0$ y $\frac{1}{n^2} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2n^{-4}} = 1 \in (0, \infty).$$

Ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por el integral test, el teorema 8 implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+2}0$ tambien converge.

Solución 3: Alplicamos el integral test directamente. Definimos la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x^2+1}{x^4+2}$. It's derivative is $f'(x) = \frac{-2x^5-4x^3+4x}{(x^4+2)^2}$. Como el denomidar simpre es > 0 y el coficiente antes de la potencia más grande de x es negativo, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f'(x) < 0$ si $x \geq N$. Que f es positiva y continua, es claro. Entonces, $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ si y sólo si $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$ existe (y esto claramente se tiene si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$ existe, porque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n^2+1}{n^4+2} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2}$). Para mostrar que $\displaystyle\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ podemos aplicar teoremas de comparación análoga a la solución 1, o se puede calcular explicitamente utilizando fracciones parciales.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{n}{(n+1)!} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1: La serie converge absolutamente (entonces a forteriori converge) por el ratio test porque

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = 0 < 1.$$

Solución 2: Sabemos por el integral test que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Si $n \geq 2$ tenemos que

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

El test de comparación muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ también converge.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1: La serie converge absolutamente (entonces a forteriori converge) por el ratio test porque

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4} < 1.$$

Solución 2: Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ converge (por el integral test). Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge por el test de comparación (teorema 7) porque para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} &\leq \frac{n!}{(2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)} = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{7^n}{n!} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$.
Solución 1: Test de razón (teorema 11):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{7^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n+1} = 0 < 1.$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge absolutamente, en particular converge (teorema 9).

Solución 2: Sabemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Como $\frac{1}{n^2} \geq 0$ y $\frac{7^n}{n!} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^n}{n!}}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 7^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \frac{7n}{n-1} \cdot \frac{7}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{7}{1} \\ &= 7 \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{7}{1} \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n-1} \cdot \frac{7}{n-2} \cdot \underbrace{\frac{7}{n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{7}{8}}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{7^7}{6!} \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n-1} \frac{7}{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Por teorema 8, segunda parte, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\tfrac{1}{n})$ diverge pero no converge absolutamente.

Sea $a_n = \sin \frac{1}{n}$. Por las propiedades del seno sabemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a 0 y que todos los $a_n \geq 0$. Por el teorema de Leibniz (teorema 12), la serie bajo consideración converge.

Ahora mostramos que la serie no converge absolutamente. Consideramos la función $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Como tanto el numerador como el denominador tienden a 0 si $x \to \infty$, podemos aplicar el teorema de l'Hospital para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \cos \frac{1}{x} = 1.$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Como $\sin\frac{1}{n} \geq 0$ y $\frac{1}{n} \geq 0$, el teorema de comparación (teorema 8) muestra que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \sin(\frac{1}{n})| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ diverge porque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica!).

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos(\tfrac{1}{n})$ diverge.

Obviamente $\lim |(-1)^n \cos\frac{1}{n}| = \lim \cos\frac{1}{n} = 1 \neq 0$, así que por corolario 2 también $\lim (-1)^n \cos\frac{1}{n} \neq 0$. Por el teorema 4, la serie diverge.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{5^n}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{(\arctan n)^n}{5^n} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Solución 1: Aplicamos el test de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{(\arctan n)^n}{5^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan n}{5} = \frac{\pi}{10} < 0.$$

Por tanto, la serie converge absolutamente, en particular converge.

Solución 2: Nótese que $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ y que $5^n \geq 0$. Por tanto $0 \leq \frac{(\arctan n)^n}{5^n} \leq \frac{\pi^n}{10^n}$. Como $\frac{\pi}{10} \in (-1,1)$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{10^n}$ converge. Ahora por el teorema 7 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{5^n}$ también converge.

Solución 3: Teorema 8 también sirve.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{-n^2}$ converge y converge absolutamente.

Usamos el test de la raíz:

$$\sqrt[n]{(1+\tfrac{1}{n})^{-n^2}} = (1+\tfrac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$

Por tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}$ converge absolutamente, en particular converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge y converge absolutamente.

Basta probar que converge porque $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \geq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

Observe que

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln\left((\ln n)^{\ln n}\right)} = \mathrm{e}^{\ln(n)\ln\left((\ln n)\right)} = n^{\ln\left((\ln n)\right)}.$$

Como ln es creciente y diverge a ∞, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\ln(\ln n) \geq 2$ para todo $n \geq N$. Esto implica que

$$0 \leq \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \text{si } \ n \geq N.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (integral test!), la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ también converge por teorema 7.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3^{1/n}-1)$ diverge.

Observe que $\frac{1}{n} \geq 0$, $3^{1/n}-1 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x}}\ln 3 = \ln 3 \in (0,\infty).$$

Entonces, por el teorema 8 la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3^{1/n}-1)$ diverge, ya que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (serie armónica!).

Problem 4. Determine si las siguientes series divergen, convergen, convergen absolutamente. Si convergen, halle el límite.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n - 7^n}{8^{n-1}} = 0.$

Solución: Como $\frac{3}{8} \in (-1,1)$ y $\frac{7}{8} \in (-1,1)$, las series geométricas $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{8^n}$ y $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{8^n}$ convergen. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot 3^n - 7^n}{8^{n-1}} &= 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{8^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{8^{n-1}} = \frac{5}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n \\ &= \frac{5}{8}\frac{1}{1-\frac{3}{8}} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{7}{8}} = \frac{5}{8-3} - \frac{1}{8-7} = 1-1 = 0.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3\pi^n}{\mathrm{e}^{2n}} = \frac{3\pi^5}{\mathrm{e}^8(\mathrm{e}^2-\pi)}.$

Solución: Como $\frac{\pi}{\mathrm{e}^2} \in (-1,1)$, la serie converge (serie geométrica), y su valor es

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3\pi^n}{\mathrm{e}^{2n}} = 3\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}\right)^n = 3\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}\right)^5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}\right)^n = 3\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}\right)^5\frac{1}{1-\frac{\pi}{\mathrm{e}^2}} = \frac{3\pi^5}{\mathrm{e}^8(\mathrm{e}^2-\pi)}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

Solución: Observe que $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Entonces las sumas parciales de al serie son

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \\ &= 1 - \frac{1}{m+2}.\end{aligned}$$

Como la sucesión de las sumas parciales $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, la serie converge y

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{m\to\infty} s_m\\ &= \lim_{m\to\infty}\Big(1-\frac{1}{m+2}\Big) = 1.\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\ln\frac{n}{n+2}$ diverge.

Solución: Observe que $\ln\frac{n}{n+2} = \ln(n) - \ln(n+2)$. Entonces las sumas parciales de la serie son

$$\begin{aligned}s_m &= \sum_{n=5}^{m}\ln\frac{n}{n+2} = \sum_{n=5}^{m}\ln(n) - \ln(n+2)\\ &= \ln(5)-\ln(7)+\ln(6)-\ln(8)+\cdots+\ln(m-1)-\ln(m+1)+\ln(m)-\ln(m+2)\\ &= \ln(5)+\ln(6)-\ln(m+1)-\ln(m+2) = \ln(30)-\ln[(m+1)(m+2)].\end{aligned}$$

Como la sucesión de las sumas parciales $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ diverge, la serie diverge:

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{m}\ln\frac{n}{n+2} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=5}^{m}\ln\frac{n}{n+2}\\ &= \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty}\ln(30)-\ln[(m+1)(m+2)] = -\infty.\end{aligned}$$