

Topología.

Fecha de entrega: 25.05.2026

Este taller es voluntario y solo se recibe hasta el lunes, 25.05.2026, 12 m. Si lo entrega, reemplazará la peor nota de los talleres anteriores.

1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. De los siguientes literales, escoja 4 y diga si son verdaderos o falsos. Pruebe su afirmación.

- | | | |
|--|---|---|
| (a) A abierto $\implies A = (\overline{A})^\circ$, | (e) ∂A es cerrado, | (i) $\overline{(A^\circ)} = \overline{A}$, |
| (b) A cerrado $\implies A = \overline{(A^\circ)}$. | (f) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, | (j) $\overline{(A^\circ)} = (\overline{A})^\circ$, |
| (c) $\partial(\overline{A}) = \partial A$, $\partial(A^\circ) = \partial A$, | (g) $\overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$, | (k) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, |
| (d) $\partial(\partial A) = \partial A$, | (h) $(\overline{A})^\circ = A^\circ$, | (l) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$, |

2. Sea (X, \mathcal{O}) un espacio topológico y sea $M \subseteq X$. Se puede concluir que $(\partial M)^\circ = \emptyset$?

3. Sea (X, d) un espacio métrico y defina $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}X$ por

$$U \in \mathcal{O} \iff \forall p \in U \exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

(a) Demuestre que para $r > 0$ y $a \in X$ la bola abierta $B_r(a)$ es abierta y que la bola cerrada $K_r(a)$ es cerrada. Sea $S_r(a) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$. Demuestre que

$$\partial B_r(a) \subseteq S_r(a) \quad \text{and} \quad \overline{B_r(a)} \subseteq K_r(a). \quad (*)$$

¿Se tiene igualdad en $(*)$?

(b) Demuestre que (X, \mathcal{O}) es un espacio topológico de Hausdorff.

4. Encuentre el interior y la clausura de

$$M := \{(x, \sin(x^{-1})) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

5. **Ejercicio voluntario.** Demuestre que todo subconjunto abierto de \mathbb{R} es unión disjunta de a lo más contables intervalos abiertos.

6. **Ejercicio voluntario.** Encuentre un espacio topológico que es conexo pero no camino conexo.

Hint. Ejercicio 16.4

7. **Ejercicio voluntario.** Sean $K, A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que K es compacto y A es cerrado. Demuestre que existen puntos $p \in K$ y $a \in A$ que con distancia minimal, es decir,

$$|p - a| = \inf\{|q - x| : q \in K, x \in A\}.$$

8. **Ejercicio voluntario.** Sea X un espacio normado de dimensión finita y sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas sobre X . Demuestre que existen números $c_1, c_2 > 0$ tal que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1, \quad x \in X.$$