

Análisis

Taller 15

Series de Taylor.

Fecha de entrega: 21 de mayo de 2026

- (a) Calcule la serie de Taylor de $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ centrada en 4. ¿La serie coincide con la función f dentro de su intervalo de convergencia?
- (b) Calcule la serie de Taylor de $g(x) = x^2(x-4)^2$ centrada en 4. ¿La serie coincide con la función g dentro de su intervalo de convergencia?
- (c) Calcule el polinomio de Taylor de grado 6 de $h(x) = \frac{\sin(x^3)}{1-x}$ centrada en 0.
- (d) Calcule el polinomio de Taylor de grado 4 de $k(x) = \frac{(\cos x)^2}{1-\sin(x^2)}$ centrada en 0.

- (a) Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log(\cos x)$. Muestre que

$$\left|f(x) - \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{2}{3}|x|^3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

- (b) Sin usar la regla de l'Hospital, calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x) - x^3}{(e^x - 1)(1 - \cos(x^2))}.$$

- Muestre que las siguientes funciones son infinitamente derivables y encuentre sus series de Taylor centradas en 0. Halle los radios de convergencia y determine donde las funciones son iguales a sus series de Taylor.

- (a) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}$.

- Si $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 + x^2} f(x) dx = \pi f(0).$$