Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 14

Integración.

Fecha de entrega: 14 de mayo de 2026

Definición. Una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se llama *localmente integrable* si $f|_{[\alpha,\beta]}$ es integrable para todo $[\alpha,\,\beta]\subseteq(a,b)$.

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ localmente integrable. Se dice que tiene una *integral impropia* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\beta\nearrow b}\lim_{\alpha\searrow a}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

---

1. Existe $\displaystyle\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t$, donde D es la función de Dirichlet

$$D:[0,1]\to\mathbb{R},\quad D(t)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{si } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

2. (a) Sea $a\in\mathbb{R}_+$ y sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f=\exp$. Calcule $\displaystyle\int_0^a \exp(x)\,\mathrm{d}x$ usando sumas de Riemann $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

   (b) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.

   (c) Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

3. Sea $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ una función localmente integrable tal que la integral impropia $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ también existe.

4. ¿Existe la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$?

5. **Ejercicio voluntario.** Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.