Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 13

Diferenciación. Regla de l'Hôpital. Fecha de entrega: 07 de mayo de 2026

Definición. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama *convexa* si para todo $x, y \in (a, b)$ y todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Desigualdad de Hölder. Sean $p, q \geq 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

para todo $x = (x_1, \ \dots, x_n), \ y = (y_1, \ \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

---

1. Halle los siguientes límites si existen:

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\right)$,

   (b) $\lim\limits_{a\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{a}\right)^a$ con $x \in \mathbb{R}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \arctan x)^{1/x}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{a}{1 - x^a} - \dfrac{b}{1 - x^b}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Demuestre:

$$f \text{ es convexa} \qquad \iff \qquad f'' \geq 0.$$

3. (a) Sean $s, p, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. Sean $x = (x_j)_{j=1}^n, \ y = (y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ y defina $z = (x_j y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$. Demuestre que

$$\|z\|_s \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

   (b) Sea $p \geq 1$. Encuentre todos los $q \geq 1$ tal que $\ell_p(\mathbb{N}) \subseteq \ell_q(\mathbb{N})$ donde

$$\ell_p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$
$$\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

4. Sean $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ y $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ en (α, β) y $\lim\limits_{x\searrow\alpha} g(x) = \lim\limits_{x\searrow\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Muestre que $\lim\limits_{x\searrow\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.