

Análisis

Taller 12

Diferenciación.

Fecha de entrega: 30 de abril de 2026

1. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas.

- (a) $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$,
(b) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. ¿Para $k \in \mathbb{N}$ defina $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Para cuáles k es f_k diferenciable? Para cuales k es f_k continuamente diferenciable? (Una función se llama *continuamente diferenciable* si es diferenciable y su derivada es continua.)

3. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua y diferenciable en (a, b) con $f'(x) \neq 1$, $x \in (a, b)$. Muestre que existe exactamente un $p \in [a, b]$ con $f(p) = p$.

4. (a) **Darboux's Theorem.** Sea $\mathcal{D} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que para cada $q \in \mathbb{R}$ con

$$\inf\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\} < q < \sup\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = q$.

- (b) Sea $\mathcal{D} = (a, b)$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con un mínimo aislado global en $x_0 \in \mathcal{D}$.
¿Existen $c, d \in (a, b)$ con $c < x_0 < d$ tales que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$, si $x \in (x_0, d)$.

5. **Ejercicio voluntario: Función exponencial.** Para $a \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ fijo se define la función

$$p_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

(a) Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{Q}$ muestre

$$p_a(q) = a^q. \tag{*}$$

(b) Muestre que p_a es diferenciable y encuentre su derivada.

Recall. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^n := \prod_{n=1}^n a, \quad a^0 := 1, \quad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

Entonces $a^q := ((a^\sigma)^{\frac{1}{m}})^n$ está definida para todos $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \{\pm 1\}$.

Remark. Dada la identidad (*) se define $a^z := \exp(z \ln(a))$, $a \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$.