

Análisis

Taller 11

Series de potencias; exp.

Fecha de entrega: 23 de abril de 2026

1. Sean X un espacio métrico, Y un espacio normado y sean $f_n, g_n : X \rightarrow Y$ funciones que convergen uniformemente a f y g respectivamente.

- (a) Muestre que $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.
- (b) ¿El producto $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ necesariamente converge uniformemente?
- (c) Sean X un espacio métrico compacto, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que convergen uniformemente a una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Suponga que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Demuestre que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0$ para todo $n > N$ y todo $x \in X$.

La conclusión es válida si X no es compacto?

2. Encuentre el radio de convergencia de

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^n}{n}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n z^n$, iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n z^{3n}}{3^n}$.

3. Muestre las siguientes propiedades de la función exponencial:

- (a) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $z \in \mathbb{C}$,
- (b) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$, $z, w \in \mathbb{C}$,
- (c) $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$,
- (d) $\exp(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$,
- (e) $|\exp(ix)| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Muestre las siguientes identidades para $x, y \in \mathbb{C}$:

- (i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- (ii) $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)$,
- (iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(b) Muestre que $\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\} \neq \emptyset$.

Sea $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in \mathbb{R}_+ : \cos x = 0\}$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}$ muestre:

- (i) $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi$.
- (ii) $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Ayuda. Puede ser útil (probar y) usar

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x \in (0, 3].$$

5. Ejercicio voluntario.

- (a) Demuestre que el radio de convergencia de las series \exp , \sin , \cos es infinito.
- (b) Demuestre que para todo $z \in \mathbb{C}$
 - (i) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$,
 - (iii) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$,
 - (ii) $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$.