

Análisis

Taller 10

Convergencia de funciones.

Fecha de entrega: 16 de abril de 2026

- Sea $I = (a, b)$ un intervalo no-vacío en los reales y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función.
 - Suponga que f es continua. Muestre que f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente monótona.
 - Suponga que f es estrictamente creciente o decreciente. Muestre que es invertible y que su inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
- Sean $a < b$ números reales y $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua. Muestre que existe por lo menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.
- Muestre que $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, es uniformemente continua pero no es Lipschitz continua.
- ¿Convergen las siguientes sucesiones puntualmente? ¿Convergen uniformemente? Si convergen, encuentre la función límite.

$$(a) \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

$$(b) \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2},$$

$$(c) \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2},$$

$$(d) \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + nx}.$$

5. Ejercicio voluntario.

- Existe una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente dos veces?
- Existe una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que alcanza cada valor en su rango exactamente tres veces?