

# Análisis

## Taller 9

Continuidad.

Fecha de entrega: 06 de abril de 2026

---

1. **Criterio de Cauchy.** Sean  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  espacios métricos,  $Y$  completo,  $f : X \supseteq \mathcal{D} \rightarrow Y$  una función y  $x_0$  un punto límite de  $\mathcal{D}$ . Entonces  $f$  tiene un límite en  $x_0$  si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D_f : \\ \left( 0 < d_X(x, x_0) < \delta \wedge 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \right).$$

2. Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:

$$S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \\ T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x-) := \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in (-\infty, x)}} f(y)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Defina

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x-).$$

Demuestre que  $g$  es continua por la izquierda y dé un ejemplo donde  $f \neq g$ .

4. Sea  $X$  un espacio métrico con la métrica discreta.

- (a) Encuentre todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (b) Encuentre todas las funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ .

5. **Ejercicio voluntario.** Diga si la función  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(1/x)$  tiene una extensión continua a  $[0, 1)$ . En el caso afirmativo, encuéntrela. (Usar conocimiento de la función sin de cursos de cálculo.)

6. **Ejercicio voluntario.** Encuentre funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

- (I)  $f$  no es continua, pero  $g$  y  $g \circ f$  lo son.
- (II)  $g$  no es continua, pero  $f$  y  $g \circ f$  lo son.
- (III)  $f$  y  $g$  no son continuas, pero  $g \circ f$  lo es.