

$\mathbb{R}$ . Continuidad.

Fecha de entrega: 26 de marzo de 2026

---

1. Para  $j = 1, \dots, n$  sea  $(X_j, \|\cdot\|_j)$  un espacio normado sobre  $\mathbb{F}$  donde  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

(a)  $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|)$  con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \|x_1\|_1 + \dots + \|x_n\|_n$$

es un espacio normado sobre  $\mathbb{F}$ .

(b) Muestre que para todo  $j = 1, \dots, n$  la proyección  $\text{pr}_j$  es continua donde

$$\text{pr}_j : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j.$$

(c) Sea  $V$  un espacio normado,  $f_j : V \rightarrow X_j$  y

$$f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n, \quad f(v) = (f_1(v), \dots, f_n(v)).$$

Muestre que  $f$  es continua si y sólo si todas las  $f_j$  son continuas.

2. ¿Dónde son las siguientes funciones continuas? Pruebe su respuesta.

(a)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$ ,

(b)  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z + \bar{z}^2|$ ,

(c)  $h : [-1, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x = 2. \end{cases}$

(d)  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

3. Diga dónde las siguientes funciones son continuas y dónde son discontinuas. Pruebe su afirmación.

(a)  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{N} \text{ sin divisor común.} \end{cases}$

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

4. Encuentre los puntos de acumulación de

(a)  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ ,

(b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ ,

(c)  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{Q}$ ,

(d)  $X$  en  $X$ , si  $X$  es un espacio métrico con la métrica discreta.

5. **Ejercicio voluntario.** Para  $x \in (0, \infty)$  sea  $[x]$  su parte entera, es decir,  $[x] = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x\}$ . Determine si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$